UNIVERSIDAD TECNICA
FEDERICO SANTA MARIA

Departamento de Matemática

Inclusiones Diferenciales

Aplicaciones en Optimización Continua

Cristopher Hermosilla

Departamento de Matemática
Universidad Técnica Federico Santa María
Valparaíso - Chile

`http://chermosilla.mat.utfsm.cl`

Versión agosto 2023

Para la confección de este texto, se ha utilizado como base el template LaTeX desarrollado por Mathias Legrand, disponible en `http://www.latextemplates.com/template/the-legrand-orange-book`.

Índice general

Multifunciones

1. Preliminares

El objetivo de este curso es estudiar un objeto llamado **inclusión diferencial**, el cual en palabras simples, corresponderá a una generalización de una ecuación diferencial ordinaria (EDO):

$$\dot{x}(t) = f(t, x(y)), \qquad t \in (a, b).$$

En este tipo de problemas, la derivada de la función está puntualmente determinada de forma única por el campo vectorial $f : (a, b) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. El problema que nos interesa estudiar en este curso es el caso en que la derivada de la función puede tener más de una opción para ser determinada puntualmente. En otras palabras, una **inclusión diferencial** será un modelo matemático descrito de la siguiente forma:

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(y)), \qquad t \in (a, b).$$

Aquí para cada $(t, x) \in (a, b) \times \mathbb{R}^n$ fijo, $F(t, x)$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. No es difícil ver que esta clase de problemas generaliza a las EDOs en el sentido que si tomaramos $F(t, x) = \{f(t, x)\}$, la inclusión diferencial se transforma en una EDO.

Un concepto fundamental que necesitamos introducir para entender las llamadas inclusiones diferenciales es el de una multifunción, el cual jugará en inclusiones diferenciales el mismo rol que juegan los campos vectoriales en EDOs.

1.1 Multifunciones

Una multifunción Φ entre dos conjuntos no vacíos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{F}$, es una relación que a cada $x \in \mathbf{E}$ le asocia un subconjunto $\Phi(x) \subseteq \mathbf{F}$. En otras palabras, es una función entre $\mathbf{E}$ y $\mathscr{P}(\mathbf{F})$, donde $\mathscr{P}(\mathbf{F})$ denota al conjunto potencia de $\mathbf{F}$. Usaremos la notación $\Phi : \mathbf{E} \rightrightarrows \mathbf{F}$ para distinguir una multifunción de una función usual. El dominio efectivo de una multifunción $\Phi : \mathbf{E} \rightrightarrows \mathbf{F}$ es el conjunto

$$\mathrm{dom}(\Phi) := \{x \in \mathbf{E} \mid \Phi(x) \neq \emptyset\},$$

su grafo es el conjunto
$$\mathrm{gr}(\Phi) := \{(x,y) \in \mathbf{E} \times \mathbf{F} \mid \ y \in \Phi(x)\}$$
y su imagen es el conjunto
$$\mathrm{im}(\Phi) := \{y \in \mathbf{F} \mid \exists x \in \mathbf{E},\ y \in \Phi(x)\}.$$

Ejemplo 1.1.1 Supongamos que $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial dado y $U \subseteq \mathbb{R}^m$ es un subconjunto no vacío. Definamos la multifunción $\Phi : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ dada por

$$\Phi(x) = f(x,U) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \exists u \in U,\ v = f(x,u)\}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Este tipo de multifunciones frecuentemente a medida que avancemos en el curso.

■

Ejemplo 1.1.2 Supongamos que $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función convexa. Su subdiferencial es una multifunción, denotada $\partial g : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$, definida via la fórmula:

$$\partial g(x) = \left\{ v \in \mathbb{R}^n \mid g(x) + v^\top (y-x) \leq g(y),\ \forall y \in \mathbb{R}^n \right\}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

■

Ejemplo 1.1.3 Supongamos que $C \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo y no vacío. Su cono normal es una multifunción, denotada $N_C : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$, definida via la fórmula:

$$N_C(x) = \left\{ \eta \in \mathbb{R}^n \mid \eta^\top (y-x) \leq 0,\ \forall y \in C \right\}, \qquad \forall x \in C.$$

Por convención $N_C(x) = \emptyset$ si $x \notin C$. ■

2. Nociones de Continuidad

Por simplicidad, asumiremos en adelante que $(\mathbf{E}, d_{\mathbf{E}})$ es un espacio métrico (abreviado e.m.) y $(\mathbf{F}, \|\cdot\|_{\mathbf{F}})$ es un espacio vectorial normado (abreviado e.v.n.) real. Dados $\bar{x} \in \mathbf{E}$, $\bar{y} \in \mathbf{F}$ y $r > 0$, escribiremos

$$\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(\bar{x}, r) := \{x \in \mathbf{E} \mid d_{\mathbf{E}}(x, \bar{x}) < r\} \quad \text{y} \quad \overline{\mathbb{B}}_{\mathbf{E}}(\bar{x}, r) := \{x \in \mathbf{E} \mid d_{\mathbf{E}}(x, \bar{x}) \leq r\},$$

$$\mathbb{B}_{\mathbf{F}}(\bar{y}, r) := \{y \in \mathbf{F} \mid \|y - \bar{y}\|_{\mathbf{F}} < r\} \quad \text{y} \quad \overline{\mathbb{B}}_{\mathbf{F}}(\bar{y}, r) := \{y \in \mathbf{F} \mid \|y - \bar{y}\|_{\mathbf{F}} \leq r\}.$$

Usaremos también la notación para $Z = \mathbf{E}, \mathbf{F}$

$$\mathbb{B}_Z = \mathbb{B}_Z(0,1), \quad \mathbb{B}_Z(r) = \mathbb{B}_Z(0,r), \quad \overline{\mathbb{B}}_Z = \overline{\mathbb{B}}_Z(0,1) \quad \text{y} \quad \overline{\mathbb{B}}_Z(r) = \overline{\mathbb{B}}_Z(0,r).$$

2.1 Semicontinuidad inferior

La primera noción de continuidad para multifunciones que estudiaremos es la llamada semicontinuidad inferior.

Definición 2.1.1 Diremos que una multifunción $\Phi : \mathbf{E} \rightrightarrows \mathbf{F}$ es semicontinua inferior (abreviado s.c.i.) en $\bar{x} \in \mathrm{dom}(\Phi)$ si para cualquier $\bar{y} \in \Phi(\bar{x})$ y cualquier sucesión $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathrm{dom}(\Phi)$ tal que $x_k \to \bar{x}$, existe una sucesión $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbf{F}$ tal que $y_k \in \Phi(x_k)$ con $y_k \to \bar{y}$.

Diremos que $\Phi : \mathbf{E} \rightrightarrows \mathbf{F}$ es s.c.i. si lo es en todo $\bar{x} \in \mathrm{dom}(\Phi)$.

Notemos que si $\bar{y} \in \Phi(\bar{x})$ con Φ s.c.i. en una vecindad de $\bar{x}$, entonces

$$\Phi_{\bar{x}}(x) := \begin{cases} \Phi(x) & x \neq \bar{x} \\ \{\bar{y}\} & x = \bar{x} \end{cases} \qquad \forall x \in \mathbf{E}$$

también es s.c.i. en una vecindad de $\bar{x}$

■ **Ejemplo 2.1.1**

1. La multifunción $\Phi : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ dada por
$$\Phi(x) := \begin{cases} [-1,1] & \text{si } x \neq 0 \\ \{0\} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
es s.c.i. en todo $\mathbb{R}$.
2. Supongamos que $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial continuo y $U \subset \mathbb{R}^m$ es un conjunto no vacío. La multifunción $\Phi(x) = f(x,U)$ es s.c.i. en todo $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. En efecto, Notemos que dado $\bar{y} \in \Phi(\bar{x})$, existe $\bar{u} \in U$ tal que $\bar{y} = f(x,\bar{u})$. Luego, si $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ es tal que $x_k \to \bar{x}$, tomando $y_k = f(x_k,\bar{u})$, tenemos que $y_k \to \bar{y}$ ya que f es continua; de hecho basta la continuidad de f sólo respecto a las variable x.

■

Proposición 2.1.2 Una multifunción $\Phi : \mathbf{E} \rightrightarrows \mathbf{F}$ es s.c.i. en $\bar{x} \in \mathrm{dom}(\Phi)$ si y sólo si para cualquier $\bar{y} \in \Phi(\bar{x})$ y $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que
$$\forall x \in \mathbb{B}_{\mathbf{E}}(\bar{x},\delta) \cap \mathrm{dom}(\Phi), \qquad \Phi(x) \cap \mathbb{B}_{\mathbf{F}}(\bar{y},\varepsilon) \neq \emptyset.$$

Demostración. $\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos por contradicción que Φ es s.c.i. en $\bar{x} \in \mathrm{dom}(\Phi)$, pero que existen $\bar{y} \in \Phi(\bar{x})$ y $\varepsilon > 0$ tales que cualquiera sea $\delta > 0$ se tiene que
$$\exists x_\delta \in \mathbb{B}_{\mathbf{E}}(\bar{x},\delta) \cap \mathrm{dom}(\Phi), \qquad \Phi(x_\delta) \cap \mathbb{B}_{\mathbf{F}}(\bar{y},\varepsilon) = \emptyset.$$
Tomando $\delta = 1/k$ con $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, podemos construir una sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{dom}(\Phi)$
$$d_{\mathbf{E}}(x_k,\bar{x}) < \frac{1}{k}$$
Dado que Φ es s.c.i. en $\bar{x}$, existe $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbf{F}$ tal que $y_k \in \Phi(x_k)$ con $y_k \to \bar{y}$. Por otro lado, sabemos que $\Phi(x_k) \cap \mathbb{B}_{\mathbf{F}}(\bar{y},\varepsilon) = \emptyset$ para todo $k \in \mathbb{N}$, es decir,
$$\|y - \bar{y}\|_{\mathbf{F}} \geq \varepsilon, \qquad \forall y \in \Phi(x_k)$$
Lo que es una contradicción, pues $y_k \in \Phi(x_k)$ y además $y_k \to \bar{y}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Asumimos que la condición $\varepsilon - \delta$ es válida para $\bar{x} \in \mathrm{dom}(\Phi)$ e $\bar{y} \in \Phi(\bar{x})$. Tomemos una sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{dom}(\Phi)$ tal que $x_k \to \bar{x}$. Debemos probar que existe una sucesión $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbf{F}$ tal que $y_k \in \Phi(x_k)$ con $y_k \to \bar{y}$.

1. Tomemos $\varepsilon_0 > 0$ arbitrario y $\delta_0 > 0$ asociado a ε_0 dado por la condición $\varepsilon - \delta$, es decir, tenemos que
$$\forall x \in \mathbb{B}_{\mathbf{E}}(\bar{x},\delta_0) \cap \mathrm{dom}(\Phi), \qquad \Phi(x) \cap \mathbb{B}_{\mathbf{F}}(\bar{y},\varepsilon_0) \neq \emptyset$$
Dado que $x_k \to \bar{x}$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_k \in \mathbb{B}_{\mathbf{E}}(\bar{x},\delta_0)$ para todo $k \geq k_0$. Luego, existe una sucesión $\{y_k^0\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{B}_{\mathbf{F}}(\bar{y},\varepsilon_0)$ tal que $y_k^0 \in \Phi(x_k)$ para todo $k \geq k_0$.
2. Tomemos ahora $\varepsilon_1 \in (0,\varepsilon_0)$ cualquier y $\delta_1 > 0$ asociado a ε_1 dado por la condición $\varepsilon - \delta$. Repitiendo el argumento anterior, podemos encontrar $\tilde{k}_1 \in \mathbb{N}$ tal que
$$x_k \in \mathbb{B}_{\mathbf{E}}(\bar{x},\min\{\delta_0,\delta_1\}), \qquad \forall k \geq \tilde{k}_1$$
Más aún, por la propiedad del enunciado, existe una sucesión $\{y_k^1\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbf{F}$ tal que
$$\{y_k^1\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{B}_{\mathbf{F}}(\bar{y},\varepsilon_1) \quad \text{e} \quad y_k^1 \in \Phi(x_k) \quad \forall k \geq k_1 := \max\{k_0,\tilde{k}_1\}$$

3. Repitiendo el argumento, podemos construir una sucesión decreciente $\{\varepsilon_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ con $\varepsilon_i \to 0^+$, una sucesión creciente $\{k_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ con $k_i \to +\infty$ y una sucesión $\{y_k^i\}$ para cada $i \in \mathbb{N}$ tal que

$$y_k^i \in \Phi(x_k) \quad \text{y} \quad \|y_k^i - \bar{y}\|_{\mathbf{F}} \leq \varepsilon, \qquad \forall k \geq k_i$$

Definiendo $y_k = y_k^i$ si $k_i \leq k < k_{i+1}$ tenemos que $y_k \to \bar{y}$. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\varepsilon_{i_0} < \varepsilon \leq \varepsilon_{i_0-1}$, y por lo tanto para $k \geq k_{i_0}$ tenemos que

$$\|y_k - \bar{y}\|_{\mathbf{F}} = \|y_k^i - \bar{y}\|_{\mathbf{F}} \leq \varepsilon_i \leq \varepsilon_{i_0} < \varepsilon, \qquad \forall i \geq i_0,\ \forall k_{i_0} \leq k_i \leq k.$$

□

Recuerdo : Semicontinuidad inferior de funciones

Una función $f : \mathbf{E} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ se dice semicontinua inferior en $\bar{x} \in \operatorname{dom}(f)$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall x \in \mathbb{B}_{\mathbf{E}}(\bar{x}, \delta), \qquad f(\bar{x}) < f(x) + \varepsilon.$$

Ahora veremos que la semicontinuidad inferior de funciones tiene un símil *visual* en el caso de multifunciones. Cabe destacar que en este caso se necesita una hipótesis adicional de compacidad.

Proposición 2.1.3 Supongamos $\Phi : \mathbf{E} \rightrightarrows \mathbf{F}$ es una multifunción. Si $\bar{x} \in \operatorname{dom}(\Phi)$ con $\Phi(\bar{x})$ compacto, entonces Φ es s.c.i. en $\bar{x}$ si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall x \in \mathbb{B}_{\mathbf{E}}(\bar{x}, \delta) \cap \operatorname{dom}(\Phi), \qquad \Phi(\bar{x}) \subseteq \Phi(x) + \mathbb{B}_{\mathbf{F}}(\varepsilon).$$

Demostración. $\boxed{\Leftarrow}$ Es directa de la Proposición 2.1.2.
$\boxed{\Rightarrow}$ Por hipótesis tenemos que $\Phi(\bar{x})$ es compacto, luego dado $\varepsilon > 0$ existen $y_1, \ldots, y_m \in \Phi(\bar{x})$ tales que

$$\Phi(\bar{x}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \mathbb{B}_{\mathbf{F}}\left(y_i, \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Por la Proposición 2.1.2, (dado que Φ es s.c.i en $\bar{x}$), existen, $\delta_1, \ldots, \delta_m > 0$ tales que

$$\Phi(x) \cap \mathbb{B}_{\mathbf{F}}\left(y_i, \frac{\varepsilon}{2}\right) \neq \emptyset, \qquad \forall x \in \mathbb{B}_{\mathbf{E}}(\bar{x}, \delta_i) \cap \operatorname{dom}(\Phi), \qquad \forall i = 1, \ldots, m.$$

Tomando $\delta := \min\{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$ tenemos que

$$y_i \in \Phi(x) + \mathbb{B}_{\mathbf{F}}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), \qquad \forall x \in \mathbb{B}_{\mathbf{E}}(\bar{x}, \delta) \cap \operatorname{dom}(\Phi), \qquad \forall i = 1, \ldots, m.$$

Por lo tanto,

$$\mathbb{B}_{\mathbf{F}}\left(y_i, \frac{\varepsilon}{2}\right) \subseteq \Phi(x) + \mathbb{B}_{\mathbf{F}}(\varepsilon), \qquad \forall x \in \mathbb{B}_{\mathbf{E}}(\bar{x}, \delta) \cap \operatorname{dom}(\Phi), \qquad \forall i = 1, \ldots, m.$$

Concluyendo que

$$\Phi(\bar{x}) \subseteq \Phi(x) + \mathbb{B}_{\mathbf{F}}(\varepsilon), \qquad \forall x \in \mathbb{B}_{\mathbf{E}}(\bar{x}, \delta) \cap \operatorname{dom}(\Phi).$$

□

2.2 Semicontinuidad superior

Ahora estudiaremos una segunda noción de continuidad para multifunciones, la llamada semicontinuidad superior.

Definición 2.2.1 Diremos que una multifunción $\Phi : \mathbf{E} \rightrightarrows \mathbf{F}$ es semicontinua superior (abreviado s.c.s.) en $\bar{x} \in \operatorname{dom}(\Phi)$ si para cualquier $\mathscr{O} \subseteq \mathbf{F}$ abierto tal que $\Phi(\bar{x}) \subseteq \mathscr{O}$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall x \in \mathbb{B}_{\mathbf{E}}(\bar{x}, \delta), \qquad \Phi(x) \subseteq \mathscr{O}.$$

Diremos que $\Phi : \mathbf{E} \rightrightarrows \mathbf{F}$ es s.c.s. si lo es en todo $\bar{x} \in \mathbf{E}$.

■ **Ejemplo 2.2.1** La multifunción $\Phi : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ dada por

$$\Phi(x) = \begin{cases} \{0\} & x \neq 0 \\ \text{[-1,1]} & x = 0 \end{cases}$$

es s.c.s. en todo $\mathbb{R}$. ■

Proposición 2.2.2 Supongamos $\Phi : \mathbf{E} \rightrightarrows \mathbf{F}$ es una multifunción. Si Φ es s.c.s. y sus imágenes son conjuntos cerrados, entonces $\operatorname{gr}(\Phi)$ es cerrado en $\mathbf{E} \times \mathbf{F}$, es decir, dada sucesión $\{(x_k, y_k)\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbf{E} \times \mathbf{F}$ tal que $y_k \in \Phi(x_k)$, si $(x_k, y_k) \to (\bar{x}, \bar{y})$, entonces $\bar{y} \in \Phi(\bar{x})$.

Por otro lado, si $\operatorname{gr}(\Phi)$ es cerrado en $\mathbf{E} \times \mathbf{F}$ y para $\bar{x} \in \operatorname{dom}(\Phi)$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\{y \in \Phi(x) \mid x \in \mathbb{B}_{\mathbf{E}}(\bar{x}, \delta)\}$$

es un conjunto pre-compacto, entonces Φ es s.c.s. en $\bar{x}$.

Demostración. Sea $\{(x_k, y_k)\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbf{E} \times \mathbf{F}$ tal que $y_k \in \Phi(x_k)$ para cada $k \in \mathbb{N}$ y $(x_k, y_k) \to (\bar{x}, \bar{y})$. Vamos a probar primero que dado $\varepsilon > 0$, existen $k_0 \in \mathbb{N}$ y una sucesión $\{\bar{y}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tales que

$$\|\bar{y}_k - y_k\|_{\mathbf{F}} \leq \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \forall k \geq k_0,\ \forall \bar{y}_k \in \Phi(\bar{x}). \tag{2.1}$$

Tomemos $\mathscr{O} = \Phi(\bar{x}) + \mathbb{B}_{\mathbf{F}}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$. Notemos que por la definición de la suma de conjuntos tenemos

$$\mathscr{O} = \bigcup_{y \in \Phi(\bar{x})} \mathbb{B}_{\mathbf{F}}\left(y, \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Luego, como $\mathscr{O}$ es una unión arbitraria de conjuntos abiertos, también es un abierto. Por otro lado, dado que Φ es s.c.s en $\bar{x}$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\Phi(x) \subseteq \Phi(\bar{x}) + \mathbb{B}_{\mathbf{F}}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), \qquad \forall x \in \mathbb{B}_{\mathbf{E}}(\bar{x}, \delta).$$

Por otro lado, dado que $x_k \to \bar{x}$, entonces, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d_{\mathbf{E}}(x_k, \bar{x}) < \delta$ para todo $k \geq k_0$, y por lo tanto tenemos

$$y_k \in \Phi(x_k) \subseteq \Phi(\bar{x}) + \mathbb{B}_{\mathbf{F}}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), \qquad \forall k \geq k_0.$$

En otras palabras, existe $\bar{y}_k \in \Phi(\bar{x})$ tal que $\|y_k - \bar{y}_k\|_{\mathbf{F}} \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ para todo $k \geq k_0$.

Por otro lado, dado que $y_k \to \bar{y}$, existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\|y_k - \bar{y}\|_{\mathbf{F}} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $k \geq k_1$. Luego, para $k \geq \text{máx}\{k_0, k_1\}$, aplicando desigualdad triangular tenemos

$$\|\bar{y}_k - \bar{y}\|_{\mathbf{F}} \leq \|\bar{y}_k - y_k\|_{\mathbf{F}} + \|y_k - \bar{y}\|_{\mathbf{F}}$$

concluyendo que $\|\bar{y}_k - \bar{y}\|_{\mathbf{F}} \leq \varepsilon$ para todo $k \geq \text{máx}\{k_0, k_1\}$, es decir, $\bar{y}_k \to \bar{y}$. Dado que $\bar{y}_k \in \Phi(\bar{x})$ con $\Phi(\bar{x})$ siendo un conjunto cerrado, concluimos que $\bar{y} \in \Phi(\bar{x})$.

A continuación probaremos la segunda parte de la proposición.
Supongamos que $\text{gr}(\Phi)$ es cerrado y que dado $\bar{x} \in \text{dom}(\Phi)$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\{y \in \Phi(x) \mid x \in \mathbb{B}_{\mathbf{E}}(\bar{x}, \delta)\} \tag{2.2}$$

es pre-compacto. Supongamos por contradicción que existe $\mathscr{O} \subseteq \mathbf{F}$ abierto tal que

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \exists x_k \in \mathbb{B}_{\mathbf{E}}\left(\bar{x}, \frac{1}{k}\right) \text{ tal que } \Phi(x_k) \not\subseteq \mathscr{O}$$

es decir, existe $y_k \in \Phi(x_k) \setminus \mathscr{O}$. Dado que $x_k \to \bar{x}$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d_{\mathbf{E}}(x_k, \bar{x}) < \delta$ para todo $k \geq k_0$. Luego

$$y_k \in \{y \in \Phi(x) \mid x \in \mathbb{B}_{\mathbf{E}}(\bar{x}, \delta)\}, \qquad \forall k \geq k_0.$$

Por lo tanto, por compacidad, pasando a una subsusesión que denotaremos igual, podemos asumir que existe $\bar{y} \in \mathbf{F}$ tal que $y_k \to \bar{y}$. Dado que $(x_k, y_k) \to (\bar{x}, \bar{y})$ e $y_k \in \Phi(x_k)$, como $\text{gr}(\Phi)$ es cerrado, entonces, $\bar{y} \in \Phi(\bar{x}) \subseteq \mathscr{O}$ obteniendo una contradicción, pues $y_k \to \bar{y}$ con $y_k \notin \mathscr{O}$ lo que implicaría que $\bar{y} \notin \mathscr{O}$. □

La condición de pre-compacidad en la proposición anterior se verifica por ejemplo si $\mathbf{F}$ es de dimensión finita y Φ es localmente acotada.

■ **Ejemplo 2.2.3** Supongamos que $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial continuo y $U \subset \mathbb{R}^m$ es un conjunto compacto y no vacío. La multifunción $\Phi(x) = f(x, U)$ es s.c.s. en todo $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. En efecto, basta notar que $\text{gr}(\Phi)$ es cerrado en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. ■

Recuerdo : Semicontinuidad superior de funciones

Una función $f : \mathbf{E} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ se dice semicontinua superior en $\bar{x} \in \text{dom}(f)$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall x \in \mathbb{B}_{\mathbf{E}}(\bar{x}, \delta), \qquad f(x) < f(\bar{x}) + \varepsilon.$$

Ahora veremos que la definición de semicontinuidad superior de funciones también tiene un símil *visual* en el caso de multifunciones.

Proposición 2.2.4 Supongamos $\Phi : \mathbf{E} \rightrightarrows \mathbf{F}$ es una multifunción. Si $\bar{x} \in \text{dom}(\Phi)$ con $\Phi(\bar{x})$ compacto, entonces Φ es s.c.s. en $\bar{x}$ si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall x \in \mathbb{B}_{\mathbf{E}}(\bar{x}, \delta), \qquad \Phi(x) \subseteq \Phi(\bar{x}) + \mathbb{B}_{\mathbf{F}}(\varepsilon). \tag{2.3}$$

Demostración. $\boxed{\Rightarrow}$ Directo ya que $\Phi(\bar{x}) + \mathbb{B}_{\mathbf{F}}(\varepsilon)$ es un abierto que contiene a $\Phi(\bar{x})$ (no se necesita la compacidad).

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos que Φ satisface (2.3) con $\Phi(\bar{x})$ compacto por hipótesis. Sea $\mathscr{O} \subseteq \mathbf{F}$ abierto tal que $\Phi(\bar{x}) \subseteq \mathscr{O}$, tenemos que probar que existe $\delta > 0$ tal que $\Phi(x) \subseteq \mathscr{O}$ para todo $x \in \mathbb{B}_{\mathbf{E}}(\bar{x}, \delta)$. Para ello, primero probaremos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\Phi(\bar{x}) + \mathbb{B}_{\mathbf{F}}(\varepsilon) \subseteq \mathscr{O}$.

Definamos

$$\rho(y) := dist(y, \mathscr{O}^c) = \inf_{z \notin \mathscr{O}} \|y - z\|_{\mathbf{F}}, \qquad \forall y \in \mathbf{F}.$$

Notemos que el mapeo $y \to \rho(y)$ es continuo (Lipschitz continuo de constante 1) en $\mathscr{O}$ y además es positivo en $\mathscr{O}$ pues si $\rho(y) = 0$ necesariamente $y \in \mathscr{O}^c$ pues $\mathscr{O}$ es abierto. Además, dado que $\Phi(\bar{x})$ es compacto se tiene

$$\min_{y \in \Phi(\bar{x})} \rho(y) > 0$$

Definiendo $\varepsilon = \dfrac{1}{2} \min_{y \in \Phi(\bar{x})} \rho(y)$ tenemos que

$$\Phi(\bar{x}) + \mathbb{B}_{\mathbf{F}}(\varepsilon) \subseteq \mathscr{O}.$$

Usando la propiedad del enunciado con el ε elegido anteriormente obtenemos que Φ es $s.c.s$ en $\bar{x}$. $\square$

2.2.1 Teorema de punto fijo de Kakutani

Ahora mostraremos un resultado que generaliza el teorema del punto fijo de Brouwer al caso de multifunciones que son s.c.s.. Cabe destacar que este resultado tiene diversas aplicaciones fuera del contexto de inclusiones diferenciales, tales como en economía y teoría de juegos.

La demostración del Teorema de punto fijo de Kakutani requiere de una desigualdad ampliamente utilizada en Teoría de Juegos conocida como la *Desigualdad Ky Fan*.

Teorema 2.2.5 — Desigualdad Ky Fan [1, Theorem 6.3.5]. Supongamos que $\varphi : \mathbf{E} \times \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ es una función dada con $\mathbf{E}$ siendo un subconjunto compacto, convexo y no vacío de un espacio vectorial topológico. Si se verifican las siguientes condiciones:

1. la función $x \mapsto \varphi(x, y)$ es semicontinua inferior para todo $y \in \mathbf{E}$ fijo,
2. la función $y \mapsto \varphi(x, y)$ es cóncava para todo $x \in \mathbf{E}$ fijo,

entonces existe $\bar{x} \in \mathbf{E}$ tal que $\sup_{y \in \mathbf{E}} \varphi(\bar{x}, y) \leq \sup_{y \in \mathbf{E}} \varphi(y, y)$.

Antes de continuar, necesitamos recordar el siguiente resultado sobre la existencia de particiones de la unidad.

Recuerdo : Partición de la unidad [4, Theorem VIII.4.2 & IX.5.3]

Para todo cubrimiento abierto $\{O_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de $\mathbf{E}$ existe una familia de funciones continuas $\{h_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq C(\mathbf{E}, [0, 1])$, llamada partición de la unidad subordinada a $\{O_\alpha\}_{\alpha \in A}$, que verifica

- Para todo $\bar{x} \in \mathbf{E}$ existen $\delta > 0$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in A$ tales que $h_\alpha(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{B}_{\mathbf{E}}(\bar{x}, \delta)$ y $\alpha \in A \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$.
- $\sum_{\alpha \in A} h_\alpha(x) = 1$ para todo $x \in \mathbf{E}$ y $\text{supp}(h_\alpha) := \overline{\{x \in \mathbf{E} \mid h_\alpha(x) \neq 0\}} \subseteq O_\alpha$ para todo $\alpha \in A$.

Teorema 2.2.6 — Punto fijo de Kakutani. Supongamos que $\Phi : \mathbf{E} \rightrightarrows \mathbf{F}$ es una multifunción dada con $(\mathbf{F}, \|\cdot\|_{\mathbf{F}})$ siendo un espacio de Banach y $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{F}$ siendo un subconjunto compacto, convexo y no vacío de $\mathbf{F}$. Si $\Phi(\mathbf{E}) \subseteq \mathbf{E}$, Φ es s.c.s. y sus imágenes son conjuntos compactos, convexos y no vacíos, entonces Φ tiene un punto fijo, es decir, existe $\bar{x} \in \mathbf{E}$ tal que $\bar{x} \in \Phi(\bar{x})$.

Demostración. Notemos primero que el problema de encontrar un punto fijo para Φ es equivalente a encontrar $\bar{x} \in \mathbf{E}$ tal que $0 \in \Psi(\bar{x})$, donde $\Psi(x) := \Phi(x) - x$ para todo $x \in \mathbf{E}$.

Supongamos por contradicción que $0 \notin \Psi(x)$ cualquiera sea $x \in \mathbf{E}$. Observemos que $\Psi(x)$ es un conjunto compacto, convexo y no vacío para cada $x \in \mathbf{E}$ pues $\Phi(x)$ también lo es. Luego, por el teorema de Hahn-Banach Geométrico, para cada $x \in \mathbf{E}$ existe $\ell_x \in \mathbf{F}^* \setminus \{0\}$ tal que

$$\sup_{v \in \Psi(x)} \langle \ell_x, v \rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}} < 0$$

o equivalentemenre

$$\sup_{v \in \Phi(x)} \langle \ell_x, v \rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}} < \langle \ell_x, x \rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}}.$$

En particular, lo anterior implica que

$$\mathbf{E} \subseteq \bigcup_{\ell \in \mathbf{F}^* \setminus \{0\}} A_\ell, \qquad \text{donde } A_\ell := \{x \in \mathbf{E} \mid \sup_{v \in \Phi(x)} \langle \ell, v \rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}} < \langle \ell, x \rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}}\} \quad \forall \ell \in \mathbf{F}^* \setminus \{0\}.$$

Afirmamos que cada A_ℓ es un conjunto abierto; el caso $\ell = 0$ es trivial pues se tiene $A_\ell = \emptyset$. En efecto, fijemos $\bar{x} \in A_\ell$ con $\ell \neq 0$. Luego dado que Φ es s.c.s. tenemos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta \in (0, \varepsilon)$ tal que

$$\Phi(x) \subseteq \Phi(\bar{x}) + \mathbb{B}_{\mathbf{F}}(\varepsilon), \qquad \forall x \in \mathbb{B}_{\mathbf{E}}(\bar{x}, \delta).$$

Tomemos $\varepsilon > 0$ tal que

$$\varepsilon \leq \frac{\langle \ell, \bar{x} \rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}} - \sup_{v \in \Phi(\bar{x})} \langle \ell, v \rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}}}{2\|\ell\|_{\mathbf{F}^*}}.$$

Luego sigue que para todo $x \in \mathbb{B}_{\mathbf{E}}(\bar{x}, \delta)$ tenemos

$$\begin{aligned}
\sup_{v \in \Phi(x)} \langle \ell, v \rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}} &\leq \sup_{v \in \Phi(\bar{x})} \langle \ell, v \rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}} + \varepsilon \|\ell\|_{\mathbf{F}^*} \\
&= \sup_{v \in \Phi(\bar{x})} \langle \ell, v \rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}} - \langle \ell, \bar{x} \rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}} + \varepsilon \|\ell\|_{\mathbf{F}^*} + \langle \ell, \bar{x} \rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}} \\
&\leq \sup_{v \in \Phi(\bar{x})} \langle \ell, v \rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}} - \langle \ell, \bar{x} \rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}} + (\varepsilon + \delta) \|\ell\|_{\mathbf{F}^*} + \langle \ell, x \rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}}
\end{aligned}$$

Dado que $\delta < \varepsilon$, tenemos que

$$\sup_{v \in \Phi(x)} \langle \ell, v \rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}} - \langle \ell, x \rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}} < 0,$$

es decir, $x \in A_\ell$, y por lo tanto A_ℓ es un conjunto abierto.

Por otro lado, dado que $\mathbf{E}$ es compacto y $\{A_\ell\}_{\ell \in \mathbf{F}^* \setminus \{0\}}$ es un cubrimiento abierto de $\mathbf{E}$, existen $\ell_1, \ldots, \ell_m \in \mathbf{F}^* \setminus \{0\}$ tales que $\mathbf{E} \subseteq A_{\ell_1} \cup \ldots \cup A_{\ell_m}$.

Tomemos ahora una partición de la unidad $h_i, \ldots, h_m \in C(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ subordinada al recubrimiento abierto $\{A_{\ell_1}, \ldots, A_{\ell_m}\}$ y definamos

$$\varphi(x, y) := \sum_{i=1}^{m} h_i(x) \langle \ell_i, x - y \rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}}, \qquad \forall x, y \in \mathbf{E}.$$

La función φ es continua (en particular s.c.i.) respecto a la variable x y afín (en particular cóncava) respecto a la variable y, y también cumple que $\varphi(y,y) = 0$ para todo $y \in \mathbf{E}$. Luego, por el teorema de Ky Fan existe $\bar{x} \in \mathbf{E}$ tal que

$$\sup_{y\in\mathbf{E}} \varphi(\bar{x},y) \leq \sup_{y\in\mathbf{E}} \varphi(y,y) = 0, \qquad \forall y \in \mathbf{E}.$$

Es a su vez implica que

$$-\varphi(\bar{x},y) := \sum_{i=1}^{m} h_i(\bar{x})\langle \ell_i, y-\bar{x}\rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}} \geq 0, \qquad \forall y \in \mathbf{E}.$$

Sea $v \in \Phi(\bar{x})$. Notemos que en particular $v \in \mathbf{E}$ y por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{m} h_i(\bar{x})\langle \ell_i, v-\bar{x}\rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}} \geq 0.$$

Ahora bien, por las propiedades de la partición de la unidad tenemos que $h_i(\bar{x}) > 0$ si y sólo si $\bar{x} \in A_{\ell_i}$. En consecuencia,

$$\sum_{i=1}^{m} h_i(\bar{x})\langle \ell_i, v-\bar{x}\rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}} \leq \sum_{i=1}^{m} h_i(\bar{x}) \left(\sup_{v\in\Phi(\bar{x})} \langle \ell_i, v-\bar{x}\rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}} \right) < 0.$$

Lo que no puede ser. Luego, necesariamente Φ tiene un punto fijo. $\square$

2.3 Continuidad

Definición 2.3.1 Diremos que una multifunción $\Phi : \mathbf{E} \rightrightarrows \mathbf{F}$ es continua en $\bar{x} \in \mathrm{dom}(\Phi)$ si Φ es s.c.i. y s.c.s. en $\bar{x}$ al mismo tiempo. Diremos que $\Phi : \mathbf{E} \rightrightarrows \mathbf{F}$ es continua si lo es en todo $\bar{x} \in \mathrm{dom}(\Phi)$.

■ **Ejemplo 2.3.1** Supongamos que $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial continuo y $U \subset \mathbb{R}^m$ es un conjunto compacto y no vacío. La multifunción $\Phi(x) = f(x,U)$ es continua en todo $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. ■

Definición 2.3.2 Diremos que una multifunción $\Phi : \mathbf{E} \rightrightarrows \mathbf{F}$ es localmente Lipschitz continua si para todo $\bar{x} \in \mathrm{dom}(\Phi)$ existen $\delta > 0$ y $L \geq 0$ tales que

$$\forall x,x' \in \mathbb{B}_{\mathbf{E}}(\bar{x},\delta), \qquad \Phi(x) \subseteq \Phi(x') + \mathbb{B}_{\mathbf{F}}(Ld_{\mathbf{E}}(x,x')).$$

Diremos que una multifunción $\Phi : \mathbf{E} \rightrightarrows \mathbf{F}$ es Lipschitz continua de módulo $L \geq 0$ si

$$\forall x,x' \in \mathbf{E}, \qquad \Phi(x) \subseteq \Phi(x') + \mathbb{B}_{\mathbf{F}}(Ld_{\mathbf{E}}(x,x')).$$

2.4 Topología de Hausdorff

Definiremos en $\mathscr{P}(\mathbf{F})$ una semi-métrica, llamada la distancia de Hausdorff. Esta semi-métrica está definida via la fórmula

$$d_H(A,B) := \max\left\{\rho_H(A,B), \rho_H(B,A)\right\}, \quad \forall A,B \subseteq \mathbf{F},$$

donde $\rho_H(X,Y) := \sup_{x\in X} \mathrm{dist}\,(x,Y) = \sup_{x\in X} \inf_{y\in Y} \|x-y\|_{\mathbf{F}}$, con la convención que $\rho_H(X,\emptyset) = +\infty$ si $X \neq \emptyset$.

Ejemplo 2.4.1

- Si $A = \mathbb{B}_{\mathbf{F}}$ y $B = \overline{\mathbb{B}}_{\mathbf{F}}$, entonces $d_H(A,B) = 0$.
- En $\mathbf{F} = \mathbb{R}^2$ si $A = \overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^2}$ y $B = \mathbb{R}^2_+$, entonces tenemos que $\rho_H(A,B) = 1$ pero $\rho_H(B,A) = +\infty$, y por lo tanto $d_H(A,B) = +\infty$.

■

La distancia de Hausdorff es una métrica sobre el espacio de los subconjuntos compactos y no vacíos de $\mathbf{F}$.

Ahora veremos algunas caracterizaciones de las propiedades de continuidad de multifunciones a través de la distancia de Hausdorff.

Proposición 2.4.2 Supongamos $\Phi : \mathbf{E} \rightrightarrows \mathbf{F}$ es una multifunción dada. Si Φ es s.c.s. en $\bar{x} \in \operatorname{dom}(\Phi)$, entonces

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } \forall x \in \mathbb{B}_{\mathbf{E}}(\bar{x}, \delta), \quad \rho_H(\Phi(x), \Phi(\bar{x})) \leq \varepsilon. \tag{2.4}$$

El converso es cierto si $\Phi(\bar{x})$ es compacto.

Demostración. Asumamos que Φ es s.c.s en $\bar{x} \in \operatorname{dom}(\Phi)$. Tomemos $\mathscr{O} = \Phi(\bar{x}) + \mathbb{B}_{\mathbf{F}}(\varepsilon)$, el cual es un abierto que contiene a $\Phi(\bar{x})$. Luego por la s.c.s. de Φ en $\bar{x}$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\Phi(x) \subseteq \Phi(\bar{x}) + \mathbb{B}_{\mathbf{F}}(\varepsilon), \qquad \forall x \in \mathbb{B}_{\mathbf{E}}(\bar{x}, \delta).$$

Sea $y \in \Phi(x)$, con $x \in \mathbb{B}_{\mathbf{E}}(\bar{x}, \delta)$. Luego, existe $\bar{y} \in \Phi(\bar{x})$ tal que

$$dist(y, \Phi(\bar{x})) \leq \|y - \bar{y}\|_{\mathbf{F}} \leq \varepsilon.$$

Luego, tomando supremo, se consigue que

$$\rho_H(\Phi(x), \Phi(\bar{x})) = \sup_{y \in \Phi(x)} dis(y, \Phi(\bar{x})) \leq \varepsilon.$$

Ahora, para el converso, supongamos que (2.4) se verifica y que $\Phi(\bar{x})$ es compacto. Sea $\varepsilon > 0$ dado, luego por (2.4) tenemos que existe $\delta > 0$ tal que

$$\rho_H(\Phi(x), \Phi(\bar{x})) \leq \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \forall x \in \mathbb{B}_{\mathbf{E}}(\bar{x}, \delta).$$

Esto último es equivalente a

$$\operatorname{dist}(y, \Phi(\bar{x})) \leq \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \forall x \in \mathbb{B}(\bar{x}, \delta), \forall y \in \Phi(x).$$

Por otro lado, dado que $\Phi(\bar{x})$ es compacto, el ínfimo en la definición de la distancia a $\Phi(\bar{x})$ se alcanza. En particular, para todo $x \in \mathbb{B}(\bar{x}, \delta)$ y para todo $y \in \Phi(x)$, existe $\bar{y}_x \in \Phi(\bar{x})$ tal que

$$\|y - \bar{y}_x\|_{\mathbf{F}} = \operatorname{dist}(y, \Phi(\bar{x})) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Esto implica en particular que $y \in \Phi(\bar{x}) + \mathbb{B}_{\mathbf{F}}(\varepsilon)$.

Finalmente, utilizando la Proposición 2.2.4, se concluye que Φ es s.c.s., ya que $\Phi(\bar{x})$ es compacto.

□

Proposición 2.4.3 Supongamos $\Phi : \mathbf{E} \rightrightarrows \mathbf{F}$ es una multifunción dada. Si para $\bar{x} \in \operatorname{dom}(\Phi)$ se tiene que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } \forall x \in \mathbb{B}_{\mathbf{E}}(\bar{x}, \delta) \cap \operatorname{dom}(\Phi), \quad \rho_H(\Phi(\bar{x}), \Phi(x)) \leq \varepsilon, \tag{2.5}$$

entonces Φ es s.c.i. en $\bar{x}$. El converso es cierto si $\Phi(\bar{x})$ es compacto.

Demostración. Veamos que Φ es s.c.i. en $\bar{x} \in \operatorname{dom}(\Phi)$ asumiendo que (2.5) es cierto. Sean $\bar{y} \in \Phi(\bar{x})$ y $\varepsilon > 0$. Tenemos que existe $\delta > 0$ dado por (2.5) tal que

$$\forall x \in \mathbb{B}_{\mathbf{E}}(\bar{x}, \delta) \cap \operatorname{dom}(\Phi), \quad \rho_H(\Phi(\bar{x}), \Phi(x)) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Como $\bar{y} \in \Phi(\bar{x})$, entonces para todo $x \in \mathbb{B}_{\mathbf{E}}(\bar{x}, \delta) \cap \operatorname{dom}(\Phi)$ se tiene $\operatorname{dist}(\bar{y}, \Phi(x)) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Por otro lado, dada la definición de ínfimo existe $y_x \in \Phi(x)$ tal que

$$\|\bar{y} - y_x\|_{\mathbf{F}} - \frac{\varepsilon}{2} < \operatorname{dist}(\bar{y}, \Phi(x)).$$

Luego, tenemos que para cualquier $x \in \mathbb{B}_{\mathbf{E}}(\bar{x}, \delta) \cap \operatorname{dom}(\Phi)$ existe $y_x \in \Phi(x)$ tal que

$$\|\bar{y} - y_x\|_{\mathbf{F}} < \operatorname{dist}(\bar{y}, \Phi(x)) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

Por lo tanto, $y_x \in \Phi(x) \cap \mathbb{B}_{\mathbf{F}}(\bar{y}, \varepsilon) \neq \emptyset$. Así, por la Proposición 2.1.2, se tiene que Φ es s.c.i. en $\bar{x}$.

Supongamos ahora que Φ es s.c.i. en $\bar{x}$ y $\Phi(\bar{x})$ es compacto. Tenemos que probar que (2.5) es cierta. Tomemos $\varepsilon > 0$. Dado que $\Phi(\bar{x})$ es compacto, existen $y_1, ..., y_n \in \Phi(\bar{x})$ tal que

$$\Phi(\bar{x}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \mathbb{B}_{\mathbf{F}}\left(y_i, \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Además, como Φ es s.c.i. en $\bar{x}$, existen $\delta_1, ..., \delta_n > 0$ tales que la condición de la Proposición 2.1.2 se cumple, es decir,

$$\forall x \in \mathbb{B}_{\mathbf{E}}(\bar{x}, \delta_i) \cap \operatorname{dom}(\Phi), \qquad \Phi(x) \cap \mathbb{B}_{\mathbf{F}}\left(y_i, \frac{\varepsilon}{2}\right) \neq \emptyset.$$

Sean

$$\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_n\} > 0, \quad \bar{y} \in \Phi(\bar{x}) \quad \text{e} \quad i \in \{1, \ldots, m\}, \text{ tal que } \bar{y} \in \mathbb{B}_{\mathbf{F}}\left(y_i, \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Finalmente, notemos que dado $x \in \mathbb{B}_{\mathbf{F}}(\bar{x}, \delta) \cap \operatorname{dom}(\Phi)$, tenemos

$$\operatorname{dist}(\bar{y}, \Phi(x)) \leq \|\bar{y} - y_i\|_{\mathbf{F}} + \operatorname{dist}(y_i, \Phi(x)) \leq \varepsilon.$$

Dado que $\bar{y} \in \Phi(\bar{x})$ es arbitrario, concluimos que

$$\forall x \in \mathbb{B}_{\mathbf{E}}(\bar{x}, \delta) \cap \operatorname{dom}(\Phi), \qquad \rho_H(\Phi(\bar{x}), \Phi(x)) \leq \varepsilon$$

□

La siguiente caracterización de la continuidad de una multifunción es una consecuencia directa de las Proposición 2.4.2 y Proposición 2.4.3.

Corolario 2.4.4 Si $\Phi : \mathbf{E} \rightrightarrows \mathbf{F}$ es una multifunción cuyas imágenes son conjuntos compactos y no vacíos, entonces Φ es continua en $\bar{x} \in \mathrm{dom}(\Phi)$ si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall x \in \mathbb{B}_{\mathbf{E}}(\bar{x}, \delta), \qquad d_H(\Phi(x), \Phi(\bar{x})) \leq \varepsilon.$$

La caracterización anterior también se puede llevar al caso de multifunciones que son Lipschitz continuas, como veremos a continuación.

Proposición 2.4.5 Si $\Phi : \mathbf{E} \rightrightarrows \mathbf{F}$ es una multifunción cuyas imágenes son conjuntos no vacíos, entonces

1. Φ es localmente Lipschitz continua si y sólo si para todo $\bar{x} \in \mathrm{dom}(\Phi)$ existen $\delta > 0$ y $L \geq 0$ tales que
$$\forall x, x' \in \mathbb{B}_{\mathbf{E}}(\bar{x}, \delta), \qquad d_H(\Phi(x), \Phi(x')) \leq L d_{\mathbf{E}}(x, x'). \tag{2.6}$$
2. Φ es Lipschitz continua si y sólo si existe $L \geq 0$ tal que
$$\forall x, x' \in \mathbf{E}, \qquad d_H(\Phi(x), \Phi(x')) \leq L d_{\mathbf{E}}(x, x').$$

Demostración.

1. $\boxed{\Rightarrow}$ Tomemos $\bar{x} \in \mathrm{dom}(\Phi)$, $\delta > 0$ y $L \geq 0$ dados por la definición de Lipschitz, es decir,
$$\forall x, x' \in \mathbb{B}_{\mathbf{E}}(\bar{x}, \delta), \qquad \Phi(x) \subseteq \Phi(x') + \mathbb{B}_{\mathbf{F}}(L d_{\mathbf{E}}(x, x')).$$
Sea $y \in \Phi(x)$, luego existe $y \in \Phi(x')$ tal que
$$\|y - y'\|_F \leq L d_E(x, x').$$
Esto implica que $\mathrm{dist}\,(y, \Phi(x')) \leq L d_E(x, x')$. Dado que $y \in \Phi(x)$ es arbitrario, tomamos supremo sobre los $y \in \Phi(x)$ y obtenemos
$$\rho_H(\Phi(x), \Phi(x')) \leq L d_E(x, x')$$
Por simetría, cambiando el rol entre x y x' se concluye.
$\boxed{\Leftarrow}$ Fijemos $\bar{x} \in \mathrm{dom}(\Phi)$. Sean $\delta > 0$ y $L \geq 0$ dados por (2.6). En particular
$$\mathrm{dist}\left(y, \Phi(x')\right) \leq d_H(\Phi(x), \Phi(x')) \leq L d_E(x, x'), \qquad \forall y \in \Phi(x).$$
Por otro lado (asumiendo $x \neq x'$), por definición de ínfimo, dado $\varepsilon \in (0, 1)$ existe $y' \in \Phi(x')$ tal que
$$\mathrm{dist}\left(y, \Phi(x')\right) \geq \|y - y'\| - \varepsilon d_E(x, x')$$
Así obtenemos que
$$\|y - y'\|_F \leq (L + \varepsilon) d_E(x, x')$$
Lo que a su vez implica que
$$y \in \Phi(x') + \overline{\mathbb{B}}_F((L + \varepsilon) d_E(x, x'))$$
Por lo tanto, para todo ε se consigue que
$$\Phi(x) \subseteq \Phi(x') + \overline{\mathbb{B}}_F((L + \varepsilon) d_E(x, x')) \subseteq \Phi(x') + \mathbb{B}_F((L + 1) d_E(x, x')).$$
y se concluye que Φ es localmente Lipschitz.
2. La demostración del caso Lipschitz es similar y queda como ejercicio para el lector.

$\square$

II Inclusiones diferenciales

3. Existencia via teoría clásica de EDOs

El objetivo central de este capítulo y los siguiente dos es estudiar la existencia de (al menos) una función $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ que sea solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(t, x(t)), & \text{c.t.p. } t \in [t_0, T] \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{ID}$$

donde $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ es una multifunción, que llamaremos la dinámica de la inclusión diferencial y $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ es la condición inicial del problema de Cauchy. Toda función $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ solución de la inclusión diferencial la llamaremos trayectoria de la inclusión diferencial.

Notemos que en el problema (ID) la velocidad de la trayectoria no está necesariamente definida en todo tiempo. Para efectos prácticos, nos bastará que esté definida en todo punto del intervalo, salvo en un conjunto de medida nula.

La primera técnica que estudiaremos para establecer la existencia de soluciones para el problema de Cauchy (ID) será usando la teoría clásica de EDOs. Para esto necesitamos introducir el siguiente concepto.

Definición 3.0.1 Si $\Phi : \mathbf{E} \rightrightarrows \mathbf{F}$ es una multifunción, diremos que una función $\varphi : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ es una selección de Φ si

$$\varphi(x) \in \Phi(x), \qquad \forall x \in \mathrm{dom}(\Phi).$$

$$\text{Si } \varphi \text{ es } \begin{cases} \text{continua} \\ \text{loc. Lipschitz continua} \\ \text{Lipschitz continua} \\ \text{medible} \\ \text{etc.,} \end{cases} \text{ diremos que } \varphi \text{ es una selección } \begin{cases} \text{continua} \\ \text{loc. Lipschitz continua} \\ \text{Lipschitz continua} \\ \text{medible} \\ \text{etc.,} \end{cases} \text{ de } \Phi.$$

3.1 Dinámicas Lipschitz continuas

Definición 3.1.1 Supongamos $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto acotado, medible y de interior no vacío. El baricentro de A es

$$b(A) := \frac{1}{\mu_n(A)} \int_A x d\mu_n,$$

donde μ_n denota la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$.

Ahora veremos algunas propiedades del baricentro que serán útiles para construir una selección Lipschitz continua de una multifunción que también lo sea; ver Teorema 3.1.1.

Lema 3.1 Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto compacto, convexo y no vacío, entonces $b\left(A + \overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n}\right) \in A$.

Demostración. Dado que A es cerrado, convexo y no vacío, tenemos que $\operatorname{proy}(\bar{x}, A)$, la proyección de cualquier $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ sobre A está bien definida y está únicamente determinada.

Para simplificar la notación, escribamos $b_A = b\left(A + \overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n}\right)$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $\operatorname{proy}(b_A, A) = 0$ (basta hacer una traslación). Supongamos por contradicción que el resultado no es cierto. En particular $b_A \neq 0$, y por lo tanto, necesariamente tenemos que

$$\int_{A + \overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n}} x^\top b_A d\mu_n = \mu_n(A + \overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n}) \|b_A\|^2 > 0. \tag{3.1}$$

Notemos que el hiperplano ortogonal a b_A divide al conjunto $A + \overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n}$ en dos partes:

$$A_+ := \{x \in A + \overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n} \mid x^\top b_A > 0\} \quad \text{y} \quad A_- := \{x \in A + \overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n} \mid x^\top b_A \leq 0\}.$$

En particular, tenemos que

$$\int_{A + \overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n}} x^\top b_A d\mu_n = \int_{A_+} x^\top b_A d\mu_n + \int_{A_-} x^\top b_A d\mu_n \leq \int_{A_+} x^\top b_A d\mu_n$$

Consideremos la función $\phi(x) = x - \frac{2x^\top b_A}{\|b_A\|^2} b_A$ definida sobre $x \in \mathbb{R}^n$; este mapeo refleja un vector $x \in \mathbb{R}^n$ respecto al hiperplano ortogonal a b_A. No es difícil ver que $\phi(x)^\top b_A = -x^\top b_A$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y además $D\phi(x) = I - \frac{2}{\|b_A\|^2} b_A b_A^\top$. En particular tenemos que $\det(D\phi(x)) = -1$. Luego por el teorema de cambio de variables sigue que

$$\int_{A_+} x^\top b_A d\mu_n = -\int_{A_+} \phi(x)^\top b_A d\mu_n = \int_{\phi(A_+)} x^\top b_A d\mu_n.$$

Por otro lado, dado que $\phi(x)^\top b_A = -x^\top b_A$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, tenemos que $x^\top b_A < 0$ para todo $x \in \phi(A_+)$ y por lo tanto

$$\int_{A + \overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n}} x^\top b_A d\mu_n \leq \int_{A_+} x^\top b_A d\mu_n = \int_{\phi(A_+)} x^\top b_A d\mu_n \leq 0.$$

Esto contradice (3.1), y por lo tanto $b_A = 0 = \operatorname{proy}(b_A, A)$. En particular $b_A \in A$.

□

Lema 3.2 Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es un subconjunto compacto, convexo con $\operatorname{int}(A) \neq \emptyset$, entonces para todo $M > 0$ tenemos que existe $K > 0$ tal que

$$\mu_n\left(A + \overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n}(r)\right) \leq \mu_n(A) + Kr, \qquad \forall r \in [0, M].$$

Demostración. Supongamos $C \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto compacto y convexo tal que $\mathrm{int}(C) \neq \emptyset$ y denotemos por $\{e_1, \ldots, e_n\}$ a la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Dado $k \in \{1, \ldots, n\}$, denotemos por $P_k(C)$ a la proyección de C sobre el espacio vectorial ortogonal a e_k, es decir

$$P_k(C) = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_k = 0 \text{ y } \exists t \in \mathbb{R} \text{ tal que } x + te_k \in C\}.$$

Dado que $\mathrm{int}(C) \neq \emptyset$, tenemos que $P_k(C)$ es no vacío, tiene interior no vacío relativo al espacio vectorial ortogonal a e_k. Esto implica que $\mu_{n-1}^k(P_k(C)) > 0$, donde μ_{n-1}^k denota la medida de Lebesgue en el espacio vectorial ortogonal a e_k (que es $(n-1)$-dimensional). Luego, dado $x \in P_k(C)$ definamos

$$a_k(x) := \inf\{t \in \mathbb{R} \mid x + te_k \in C\} \quad \text{y} \quad b_k(x) := \sup\{t \in \mathbb{R} \mid x + te_k \in C\}.$$

Como C es compacto, tanto $a_k(x)$ como $b_k(x)$ son números reales bien definidos dado $x \in P_k(C)$. Luego tenemos que

$$C = \{x + te_k \mid x \in P_k(C),\ a_k(x) \leq t \leq b_k(x)\}$$

Esto implica en particular que

$$\mu_n(C) = \int_{P_k(C)} (b_k(x) - a_k(x))\, d\mu_{n-1}^k(x).$$

Ahora bien, como $P_k(C) = P_k(C + [-r, r]e_k)$ y además

$$a_k(x) - r = \inf\{t \in \mathbb{R} \mid x + te_k \in C + [-r, r]e_k\} \quad \text{y} \quad b_k(x) + r := \sup\{t \in \mathbb{R} \mid x + te_k \in C + [-r, r]e_k\},$$

obtenemos que

$$\mu_n(C + [-r, r]e_k) = \mu_n(C) + 2r\mu_{n-1}^k(P_k(C)). \tag{3.2}$$

Por otro lado, notemos que dado $r \geq 0$ tenemos

$$A + \overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n}(r) \subseteq A + [-r, r]^n = \left(A + \{0\} \times [-r, r]^{n-1}\right) + [-r, r]e_1.$$

Luego, usando (3.2) tenemos

$$\mu_n\left(A + \overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n}(r)\right) \leq \mu_n\left(A + \{0\} \times [-r, r]^{n-1}\right) + 2r\mu_{n-1}^1\left(P_1\left(A + \{0\} \times [-r, r]^{n-1}\right)\right).$$

Notemos también que

$$\left(A + \{0\} \times [-r, r]^{n-1}\right) = \left(A + \{0\}^2 \times [-r, r]^{n-2}\right) + [-r, r]e_2,$$

lo que implica, usando (3.2) nuevamente, que

$$\mu_n\left(A + \{0\} \times [-r, r]^{n-1}\right) \leq \mu_n\left(A + \{0\}^2 \times [-r, r]^{n-2}\right) + 2r\mu_{n-1}^2\left(P_2\left(A + \{0\}^2 \times [-r, r]^{n-2}\right)\right).$$

Iterando este proceso obtenemos

$$\mu_n\left(A + \overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n}(r)\right) \leq \mu_n(A) + 2r\sum_{k=1}^{n} \mu_{n-1}^k\left(P_k\left(A + \{0\}^k \times [-r, r]^{n-k}\right)\right).$$

Dado que A es compacto, existe $R > 0$ tal que $A \subseteq [-R, R]^n$. Lo que implica que

$$A + \{0\}^k \times [-r, r]^{n-k} \subseteq [-R, R]^n + [-r, r]^n \subseteq [-R - r, R + r]^n, \qquad \forall k = 1, \ldots, n.$$

Esto a su vez implica que si tomamos $r \in [0, M]$ tenemos que

$$\mu_{n-1}^k\left(P_k\left(A + \{0\}^k \times [-r, r]^{n-k}\right)\right) \leq 2^{n-1}(R + M)^{n-1}, \qquad \forall k = 1, \ldots, n$$

Lo que finalmente implica que

$$\mu_n\left(A + \overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n}(r)\right) \leq \mu_n(A) + rn2^n(R + M)^{n-1}.$$

□

Teorema 3.1.1 Supongamos que $\Phi\colon \mathbf{E} \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ es una multifunción dada. Si Φ es Lipschitz continua y acotada, y sus imágenes son conjuntos convexos, compactos, entonces la función $\varphi\colon \mathbf{E} \to \mathbb{R}^n$ definida por

$$\varphi(x) := b(\Phi(x) + \overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n}), \qquad \forall x \in \operatorname{dom}(\Phi)$$

es una selección Lipschitz continua de Φ.

Demostración. Primero notemos que si $dom(\Phi) = \emptyset$ entonces el resultado es trivial. Por otro lado, si existe $\bar{x} \in \operatorname{dom}(\Phi)$ entonces necesariamente $\operatorname{dom}(\Phi) = \mathbf{E}$, pues al ser Φ Lipschitz continua tenemos que

$$\emptyset \neq \Phi(\bar{x}) \subseteq \Phi(x) + \mathbb{B}_{\mathbf{F}}(Ld_{\mathbf{E}}(x,\bar{x})), \qquad \forall x \in \mathbf{E}.$$

Además, por el Lema 3.1, tenemos φ es una selección de Φ. Luego, para concluir, debemos ver que φ es una función Lipschitz continua en $\mathbf{E}$.

Sean $x, x' \in \mathbf{E}$ y usemos la notación $A = \Phi(x) + \overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n}$ y $A' = \Phi(x') + \overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n}$. Luego sigue que

$$\begin{aligned}
\|\varphi(x) - \varphi(x')\| &= \left\| \frac{1}{\mu_n(A)} \int_A y d\mu_n - \frac{1}{\mu_n(A')} \int_{A'} y d\mu_n \right\|_{\mathbb{R}^n} \\
&\leq \left\| \left(\frac{1}{\mu_n(A)} - \frac{1}{\mu_n(A')} \right) \int_{A\cap A'} y d\mu_n \right\|_{\mathbb{R}^n} + \frac{1}{\mu_n(A)} \int_{A\setminus A'} \|y\|_{\mathbb{R}^n} d\mu_n + \frac{1}{\mu_n(A')} \int_{A'\setminus A} \|y\|_{\mathbb{R}^n} d\mu_n \\
&= \frac{|\mu_n(A') - \mu_n(A)|}{\mu_n(A)\mu_n(A')} \int_{A\cap A'} \|y\|_{\mathbb{R}^n} d\mu_n + \frac{1}{\mu_n(A)} \int_{A\setminus A'} \|y\|_{\mathbb{R}^n} d\mu_n + \frac{1}{\mu_n(A')} \int_{A'\setminus A} \|y\|_{\mathbb{R}^n} d\mu_n.
\end{aligned}$$

Dado que Φ es acotada, existe $M > 0$ tal que $\|v\| \leq M$ para todo $\tilde{x} \in \mathbf{E}$ y para todo $v \in \Phi(\tilde{x})$. Por lo tanto, como $A = \Phi(x) + \overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n}$, entonces para $y \in A$ tenemos que existe $v \in \Phi(x)$ y $e \in \overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n}$ tales que $y = v + e$. Luego,

$$\|y\|_{\mathbb{R}^n} \leq \|v\|_{\mathbb{R}^n} + \|e\|_{\mathbb{R}^n} \leq M + 1, \qquad \forall y \in A.$$

Notemos que lo mismo es válida para todo $y \in A'$, y por lo tanto tenemos que

$$\|\varphi(x) - \varphi(x')\|_{\mathbb{R}^n} \leq \frac{|\mu_n(A') - \mu_n(A)|}{\mu_n(A)\mu_n(A')}(M+1)\mu_n(A\cap A') + \left(\frac{\mu_n(A\setminus A')}{\mu_n(A)} + \frac{\mu_n(A'\setminus A)}{\mu_n(A')} \right)(M+1)$$

Notemos que, para todo $y \in \Phi(x)$ tenemos que $y + \overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n} \subseteq A$ y también para todo $y' \in \Phi(x')$ tenemos que $y' + \overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n} \subseteq A'$. Luego, como la medida de Lebesgue es invariante bajo traslaciones se tiene,

$$\mu_n(\overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n}) \leq \min\{\mu_n(A), \mu_n(A')\}.$$

En consecuencia, como $\mu_n(A) \leq \mu_n(A \cap A')$, tenemos que

$$\|\varphi(x) - \varphi(x')\|_{\mathbb{R}^n} \leq \left(\frac{|\mu_n(A) - \mu_n(A')|}{\mu_n(\overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n})} + \frac{\mu_n(A\setminus A')}{\mu_n(\overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n})} + \frac{\mu_n(A'\setminus A)}{\mu_n(\overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n})} \right)(M+1)$$

Para concluir, necesitamos estimar:

$$|\mu_n(A) - \mu_n(A')|, \quad \mu_n(A\setminus A'), \quad \mu_n(A'\setminus A)$$

Dado que A, A' son acotados $d_H(A,A') \in \mathbb{R}$ y además como A, A' son compactos tenemos que

$$\forall y \in A, \exists y' \in A' \text{ tal que } \|y - y'\|_{\mathbb{R}^n} = \operatorname{dist}\big(y, A'\big)$$

y como
$$\|y-y'\|_{\mathbb{R}^n} = \operatorname{dist}\left(y,A'\right) \leq \rho_H(A,A') \leq d_H(A,A')$$
entonces tenemos que $A \subseteq A' + \overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n}(d_H(A,A'))$. Esto a su vez implica que

$$(A\setminus A') \cup A' \subseteq A \cup A' \subseteq (A' + \overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n}(d_H(A,A'))) \cup A' \subseteq A' + \overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n}(d_H(A,A')).$$

Por monotonía de la medida de Lebesgue,

$$\mu_n(A\setminus A') + \mu_n(A') \leq \mu_n(A' + \overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n}(d_H(A,A'))) \leq \mu_n(A') + K d_H(A,A')$$

donde la última desigualdad viene dada por el Lema 3.2. Aquí usamos el hecho que $d_H(A,A') \leq d_H(\Phi(x),\Phi(x')) \leq 2M$ y K es la constante asociada a $2M$ en el Lema 3.2. Luego tenemos que

$$\mu_n(A\setminus A') \leq K d_H(A,A') \leq K d_H(\Phi(x),\Phi(x')).$$

Por simetría, cambiando el rol entre A y A', concluimos que

$$\mu_n(A'\setminus A) \leq K d_H(\Phi(x),\Phi(x')).$$

Por otro lado, dado que $A \subseteq A' + \overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n}(d_H(A,A'))$ tenemos que

$$\mu_n(A) \leq \mu_n(A' + \overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n}(d_H(A,A'))) \leq \mu_n(A') + K d_H(A,A')$$

Donde la última desigualdad se tiene por el Lema 3.2. Por simetría entre A y A' obtenemos finalmente

$$\begin{aligned}\|\varphi(x)-\varphi(x')\|_{\mathbb{R}^n} &\leq \left(\frac{|\mu_n(A)-\mu_n(A')|}{\mu_n(\overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n})} + \frac{\mu_n(A\setminus A')}{\mu_n(\overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n})} + \frac{\mu_n(A'\setminus A)}{\mu_n(\overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n})}\right)(M+1)\\ &\leq \frac{3K d_H(\Phi(x),\Phi(x'))}{\mu_n(\overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n})}(M+1)\end{aligned}$$

Dado que Φ es Lipschitz continua, para alguna constante $L \geq 0$, tenemos que

$$\|\varphi(x)-\varphi(x')\|_{\mathbb{R}^n} \leq \frac{3KL}{\mu_n(\overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n})}(M+1) d_{\mathbf{E}}(x,x')$$

Por lo tanto φ es Lipschitz continua de constante

$$L_\varphi := \frac{3KL}{\mu_n(\overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n})}(M+1).$$

□

Recuerdo : Teorema de Picard-Lindelof [2, Theorem 1.18]

Si $\mathscr{O} \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ es un abierto y $f : \mathscr{O} \to \mathbb{R}^n$ es una función continua y localmente Lipschitz respecto a la segunda variable, entonces para todo $(t_0,x_0) \in \mathscr{O}$ existe $\delta > 0$ y una (única) trayectoria $x : (t_0-\delta, t_0+\delta) \to \mathbb{R}^n$ continuamente diferenciable tal que

$$\begin{cases}\dot{x}(t) = f(t,x(t)), & \forall t \in (t_0-\delta, t_0+\delta)\\ x(t_0) = x_0\end{cases}$$

El siguiente resultado es una consecuencia directa del Teorema de Picard-Lindelof y del Teorema 3.1.1 sobre la existencia de una selección Lipschitz continua que acabamos de demostrar.

Corolario 3.1.2 Supongamos que $F:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ es una multifunción. Si $\mathscr{O}\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ es un abierto, F es Lipschitz continua y acotada en $\mathscr{O}$, y sus imágenes son conjuntos convexos, compactos y no vacíos, entonces para todo $(t_0,x_0)\in\mathscr{O}$ existe $\delta>0$ y una trayectoria $x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ continuamente diferenciable en $(t_0-\delta,t_0+\delta)$ solución del problema de Cauchy

$$\dot{x}(t)\in F(t,x(t)), \qquad \text{para todo } t\in(t_0-\delta,t_0+\delta), \qquad x(t_0)=x_0$$

3.2 Dinámicas continuas

Selección continua minimal

Definición 3.2.1 Supongamos $(\mathbf{F},\|\cdot\|_{\mathbf{F}})$ es un espacio de Hilbert y $K\subseteq\mathbf{F}$ es un conjunto convexo, cerrado y no vacío. Definimos el elemento de norma mínima de K como

$$m(K):=\operatorname{proy}(0,K)$$

Teorema 3.2.1 Supongamos que $(\mathbf{F},\|\cdot\|_{\mathbf{F}})$ es un espacio de Hilbert y $\Phi\colon\mathbf{E}\rightrightarrows\mathbf{F}$ es una multifunción dada. Si Φ es continua y sus imágenes son conjuntos cerrados, convexos y no vacíos, entonces la función $\varphi\colon\mathbf{E}\to\mathbf{F}$ definida por

$$\varphi(x):=m(\Phi(x)), \qquad \forall x\in\mathbf{E}$$

es una selección continua de Φ.

Demostración. Fijemos $\bar{x}\in\mathbf{E}$ y probemos que φ es continua en $\bar{x}$.

Supongamos primero que $0\in\Phi(\bar{x})$. En este caso tenemos que $\varphi(\bar{x})=0$. Ahora bien, como Φ es s.c.i. en $\bar{x}$ tenemos que dado $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que

$$\forall x\in\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(\bar{x},\delta), \qquad \Phi(x)\cap\mathbb{B}_{\mathbf{F}}(\varepsilon)\neq\emptyset.$$

En otras palabras, existe $y\in\Phi(x)$ tal que $\|y\|_{\mathbf{F}}<\varepsilon$. Luego sigue que

$$\|\varphi(x)-\varphi(\bar{x})\|_{\mathbf{F}}=\|\varphi(x)\|_{\mathbf{F}}\leq\|y\|_{\mathbf{F}}<\varepsilon, \qquad \forall x\in\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(\bar{x},\delta).$$

Esto implica que φ es una función continua en $\bar{x}$.

Consideremos ahora el caso $0\notin\Phi(\bar{x})$. En particular tenemos que $\varphi(\bar{x})\neq0$. Ahora bien, como Φ es s.c.s. en $\bar{x}$, tenemos que dado $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que

$$\forall x\in\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(\bar{x},\delta), \qquad \Phi(x)\subseteq\Phi(\bar{x})+\mathbb{B}_{\mathbf{F}}\left(\frac{\varepsilon^2}{4\|\varphi(\bar{x})\|_{\mathbf{F}}}\right).$$

En consecuencia, dado $x\in\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(\bar{x},\delta)$ existe $\bar{y}\in\Phi(\bar{x})$ tal que

$$\|\varphi(\bar{x})-\bar{y}\|_F\leq\frac{\varepsilon^2}{4\|\varphi(\bar{x})\|_{\mathbf{F}}}.$$

Notemos que

$$\|\varphi(x)-\varphi(\bar{x})\|_{\mathbf{F}}^2=\|\varphi(x)\|_{\mathbf{F}}^2-\|\varphi(\bar{x})\|_{\mathbf{F}}^2-2\langle\varphi(\bar{x}),\varphi(x)-\varphi(\bar{x})\rangle.$$

Dado que $\varphi(\bar{x})$ es la proyección de $y=0$ sobre $\Phi(\bar{x})$, tenemos que $\langle 0-\varphi(\bar{x}), \bar{y}-\varphi(\bar{x})\rangle \leq 0$, lo que implica que $\|\varphi(\bar{x})\|_{\mathbf{F}}^2 \leq \langle \varphi(x), \bar{y}\rangle$. En consecuencia

$$\langle \varphi(\bar{x}), \varphi(x)-\varphi(\bar{x})\rangle = \langle \varphi(\bar{x}), \varphi(x)-\bar{y}\rangle + \langle \varphi(\bar{x}), \bar{y}-\varphi(\bar{x})\rangle \geq \langle \varphi(\bar{x}), \varphi(x)-\bar{y}\rangle \geq -\|\varphi(\bar{x})\|_{\mathbf{F}}\|\varphi(x)-\bar{y}\|_F.$$

A partir de esto obtenemos

$$\|\varphi(x)-\varphi(\bar{x})\|_{\mathbf{F}}^2 \leq \|\varphi(x)\|_{\mathbf{F}}^2 - \|\varphi(\bar{x})\|_{\mathbf{F}}^2 + \frac{\varepsilon^2}{2}. \tag{3.3}$$

Por otro lado, tomemos $\tilde{\varepsilon} > 0$ tal que $\tilde{\varepsilon}^2 + 2\tilde{\varepsilon}\|\varphi(\bar{x})\|_{\mathbf{F}} \leq \frac{\varepsilon^2}{2}$. Luego, dado que Φ es s.c.i. en $\bar{x}$ tenemos que existe $\tilde{\delta} > 0$ tal que

$$\forall x \in \mathbb{B}_{\mathbf{E}}(\bar{x}, \tilde{\delta}), \qquad \exists y_x \in \Phi(x) \cap \mathbb{B}_{\mathbf{F}}(\varphi(\bar{x}), \tilde{\varepsilon}).$$

A partir de esto, tenemos que

$$\|\varphi(x)\|_{\mathbf{F}} \leq \|y_x\|_{\mathbf{F}} \leq \|y_x - \varphi(\bar{x})\|_{\mathbf{F}} + \|\varphi(\bar{x})\|_{\mathbf{F}} \leq \tilde{\varepsilon} + \|\varphi(\bar{x})\|_{\mathbf{F}}.$$

Sigue

$$\|\varphi(x)\|_{\mathbf{F}}^2 - \|\varphi(\bar{x})\|_{\mathbf{F}}^2 \leq (\|\varphi(x)\|_{\mathbf{F}} - \|\varphi(\bar{x})\|_{\mathbf{F}})(\|\varphi(x)\|_{\mathbf{F}} + \|\varphi(\bar{x})\|_{\mathbf{F}}) \leq \tilde{\varepsilon}(\tilde{\varepsilon} + 2\|\varphi(\bar{x})\|_{\mathbf{F}}) \leq \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Finalmente, si $x \in \mathbb{B}_{\mathbf{E}}(\bar{x}, \min\{\delta, \tilde{\delta}\})$, obtenemos la continuidad de φ en $\bar{x}$ pues

$$\|\varphi(x) - \varphi(\bar{x})\|_{\mathbf{F}} < \varepsilon.$$

□

Recuerdo : Teorema de Peano [2, Theorem 1.49]

Si $\mathscr{O} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ es un abierto y $f : \mathscr{O} \to \mathbb{R}^n$ es una función continua, entonces para todo $(t_0, x_0) \in \mathscr{O}$ existe $\delta > 0$ y una trayectoria $x : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \to \mathbb{R}^n$ continuamente diferenciable tal que

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)), & \forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

De forma similar a lo hecho para el caso de dinámicas Lipschitz continuas, podemos enunciar un teorema sobre la existencia de soluciones para una inclusión diferencia como consecuencia directa del Teorema de Peano y del Teorema 3.2.1 que acabamos de demostrar.

Corolario 3.2.2 Supongamos que $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ es una multifunción. Si $\mathscr{O} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ es un abierto, F es continua en $\mathscr{O}$, y sus imágenes son conjuntos cerrados, convexos y no vacíos, entonces para todo $(t_0, x_0) \in \mathscr{O}$ existe $\delta > 0$ y una trayectoria $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ continuamente diferenciable en el intervalo $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ solución del problema de Cauchy

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)), \qquad \text{para todo } t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta), \qquad x(t_0) = x_0$$

3.3 Dinámicas semicontinuas inferiores

El resultado que estudiaremos ahora se conoce en la literatura como el Teorema de Selección de Michael (ver Teorema 3.3.3 más abajo). Este resultado permite asegurar la existence de una selección continua bajo hipótesis más débiles que del Teorema 3.2.1. En particular, la hipótesis de continuidad sobre la dinámica se puede relajar a solo semicontinuidad inferior y $(\mathbf{F}, \|\cdot\|_{\mathbf{F}})$ solo necesita ser un espacio de Banach.

Para demostrar el Teorema de selección de Michael necesitamos un par de resultados previos.

Proposición 3.3.1 Supongamos que $\Phi\colon \mathbf{E} \rightrightarrows \mathbf{F}$ es una multifunción dada y $\psi : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ es una función dada. Si Φ es s.c.i. y ψ es continua, entonces para todo $\rho > 0$ la multifunción $\Psi : \mathbf{E} \rightrightarrows \mathbf{F}$ definida más abajo es s.c.i

$$\Psi(x) := \Phi(x) \bigcap \mathbb{B}_{\mathbf{F}}(\psi(x), \rho), \qquad \forall x \in \mathbf{E}.$$

Demostración. Sea $\bar{x} \in \operatorname{dom}(\Psi)$, $\bar{y} \in \Psi(\bar{x})$ y $\varepsilon > 0$. Notemos que en particular, $\bar{y} \in \mathbb{B}_{\mathbf{F}}(\psi(\bar{x}), \rho)$. Dado que Φ es s.c.i. existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\forall x \in \mathbb{B}_{\mathbf{E}}(\bar{x}, \delta_1), \qquad \Phi(x) \cap \mathbb{B}_{\mathbf{F}}(\bar{y}, \tilde{\varepsilon}) \neq \emptyset, \qquad \text{con } \tilde{\varepsilon} = \min\left\{\varepsilon, \frac{\rho - \|\bar{y} - \psi(\bar{x})\|_{\mathbf{F}}}{2}\right\}.$$

Por la continuidad de ψ tenemos que existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$\forall x \in \mathbb{B}_{\mathbf{E}}(\bar{x}, \delta_2), \qquad \|\psi(x) - \psi(\bar{x})\|_{\mathbf{F}} \leq \frac{\rho - \|\bar{y} - \psi(\bar{x})\|_{\mathbf{F}}}{2}.$$

Luego sigue que si $x \in \mathbb{B}_{\mathbf{E}}(\bar{x}, \min\{\delta_1, \delta_2\})$ e $y_x \in \Phi(x) \cap \mathbb{B}_{\mathbf{F}}(\bar{y}, \tilde{\varepsilon})$ tenemos que

$$\|y_x - \psi(x)\|_{\mathbf{F}} \leq \|y_x - \bar{y}\|_{\mathbf{F}} + \|\bar{y} - \psi(\bar{x})\|_{\mathbf{F}} + \|\psi(\bar{x}) - \psi(x)\|_{\mathbf{F}} \leq \tilde{\varepsilon} + \|\bar{y} - \psi(\bar{x})\|_{\mathbf{F}} + \frac{\rho - \|\bar{y} - \psi(\bar{x})\|_{\mathbf{F}}}{2} \leq \rho.$$

Por lo tanto $y_x \in \mathbb{B}_{\mathbf{F}}(\psi(x), \rho)$, lo que implica que $\Psi(x) \cap \mathbb{B}_{\mathbf{F}}(\bar{y}, \varepsilon) \neq \emptyset$, es decir, Ψ es s.c.i. en $\bar{x}$. □

Proposición 3.3.2 Supongamos que $\Phi\colon \mathbf{E} \rightrightarrows \mathbf{F}$ es una multifunción dada. Si Φ es s.c.i. y sus imágenes son conjuntos convexos y no vacíos, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $\varphi_\varepsilon : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ continua tal que

$$\operatorname{dist}(\varphi_\varepsilon(x), \Phi(x)) \leq \varepsilon, \qquad \forall x \in \mathbf{E}.$$

Demostración. Usando el hecho que Φ tiene imágenes no vacías, para cada $\xi \in \mathbf{E}$ podemos escoger $y_\xi \in \Phi(\xi)$. Dado que Φ es s.c.i., para $\varepsilon > 0$ fijo, existe $\delta_\xi > 0$ tal que

$$\forall x \in \mathbb{B}_{\mathbf{E}}(\xi, \delta_\xi), \qquad \Phi(x) \cap \mathbb{B}_{\mathbf{F}}(y_\xi, \varepsilon) \neq \emptyset.$$

Notemos que $\{\mathbb{B}_{\mathbf{F}}(y_\xi, \varepsilon)\}_{\xi \in \mathbf{E}}$ es un cubrimiento abierto de algún subconjunto de $\mathbf{F}$, y por lo tanto, podemos asociarle una partición de la unidad que denotaremos $\{h_\xi\}_{\xi \in \mathbf{E}}$.

Definamos $\varphi_\varepsilon = \sum_{\xi \in \mathbf{E}} y_\xi h_\xi$. Notemos que para cada $x \in \mathbf{E}$ existen un abierto $\mathscr{O}_x$ y $\xi_1^x, \ldots, \xi_{m_x}^x \in \mathbf{E}$ tales que

$$\varphi_\varepsilon(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^{m_x} \xi_i^x h_{\xi_i^x}(\tilde{x}), \qquad \forall \tilde{x} \in \mathscr{O}_x.$$

Luego, como (localmente) φ_ε es una suma finita de funciones continuas, tenemos que φ_ε es una función continua.

Por otro lado, dado $x \in \mathbf{E}$ fijo, si $h_\xi(x) > 0$, entonces necesariamente $x \in \operatorname{supp}(h_\xi) \subseteq \mathbb{B}_\mathbf{E}(\xi, \delta_\xi)$. Esto implica que

$$\Phi(x) \cap \mathbb{B}_\mathbf{F}(y_\xi, \varepsilon) \neq \emptyset$$

y por lo tanto, $y_\xi \in \Phi(x) + \mathbb{B}_\mathbf{F}(\varepsilon)$. Además, dado que $\Phi(x)$ es un conjunto convexo, $\Phi(x) + \mathbb{B}_\mathbf{F}(\varepsilon)$ también es un conjunto convexo. Dado que $\sum_{i=1}^{m_x} h_{\xi_i^x}(x) = 1$, lo anterior implica que

$$\varphi_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{m_x} \xi_i^x h_{\xi_i^x}(x) \in \Phi(x) + \mathbb{B}_\mathbf{F}(\varepsilon).$$

A partir de esto, se obtiene el resultado buscado. $\square$

Ahora estamos en condiciones de probar el Teorema de Selección de Michael

Teorema 3.3.3 — Selección de Michael. Supongamos que $(\mathbf{F}, \|\cdot\|_\mathbf{F})$ es un espacio de Banach y que $\Phi \colon \mathbf{E} \rightrightarrows \mathbf{F}$ es una multifunción dada. Si Φ es s.c.i. y sus imágenes son conjuntos cerrados, convexos y no vacíos, entonces Φ admite una selección continua.

Demostración. Probaremos primero usando inducción que existe una sucesión de funciones continuas $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$ tenemos que $\varphi_k : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ y

$$\operatorname{dist}(\varphi_k(x), \Phi(x)) \leq \frac{1}{2^{k+1}} \quad \text{y} \quad \|\varphi_k(x) - \varphi_{k+1}(x)\| \leq \frac{1}{2^k}, \qquad \forall x \in \mathbf{E}.$$

Veamos el caso base. Sea $\phi_0 : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ la función continua dada por la Proposición 3.3.2 con $\varepsilon = \frac{1}{2}$, es decir, verifica

$$\operatorname{dist}(\varphi_0(x), \Phi(x)) \leq \frac{1}{2}, \qquad \forall x \in \mathbf{E}.$$

Notemos que por la Proposición 3.3.1 la multifunción $x \mapsto \Phi_0(x) := \Phi(x) \cap \mathbb{B}_\mathbf{F}\left(\varphi_0(x), \frac{1}{2}\right)$ es s.c.i. y luego, usando nuevamente la Proposición 3.3.2 pero con $\varepsilon = \frac{1}{2^2}$, tenemos que existe $\varphi_1 : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ continua tal que

$$\operatorname{dist}(\varphi_1(x), \Phi_0(x)) \leq \frac{1}{2^2}, \qquad \forall x \in \mathbf{E}.$$

Notemos que $\Phi_0(x) \subseteq \Phi(x)$ para todo $x \in \mathbf{E}$, y en consecuencia

$$\operatorname{dist}(\varphi_1(x), \Phi(x)) \leq \operatorname{dist}(\varphi_1(x), \Phi_0(x)) \leq \frac{1}{2^2}, \qquad \forall x \in \mathbf{E}.$$

Además, como

$$\|\varphi_0(x) - \varphi_1(x)\|_\mathbf{F} \leq \|\varphi_0(x) - y\|_\mathbf{F} + \|y - \varphi_1(x)\|_\mathbf{F}, \qquad \forall y \in \Phi_0(x) = \Phi(x) \cap \mathbb{B}_\mathbf{F}\left(\varphi_0(x), \frac{1}{2}\right)$$

tenemos que

$$\|\varphi_0(x) - \varphi_1(x)\|_\mathbf{F} \leq \frac{1}{2} + \operatorname{dist}(\varphi_1(x), \Phi_0(x)) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \leq 1 = \frac{1}{2^0}.$$

Esto muestra el caso base.

Supongamos ahora que existen funciones continuas $\phi_0, \ldots, \varphi_n : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ tales que

$$\operatorname{dist}(\varphi_k(x), \Phi(x)) \leq \frac{1}{2^{k+1}} \quad \text{y} \quad \|\varphi_k(x) - \varphi_{k+1}(x)\| \leq \frac{1}{2^k}, \qquad \forall x \in \mathbf{E},\ k = 1, \ldots, n-1.$$

Gracias a la Proposición 3.3.2 con la multifunción $x \mapsto \Phi_n(x) := \Phi(x) \cap \mathbb{B}_{\mathbf{F}}(\varphi_n(x), \frac{1}{2^{n+1}})$ y $\varepsilon = \frac{1}{2^{n+2}}$ tenemos que existe $\varphi_{n+1} : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ continua tal que

$$\operatorname{dist}(\varphi_{n+1}(x), \Phi_n(x)) \leq \frac{1}{2^{n+2}}, \qquad \forall x \in \mathbf{E}.$$

Dado que $\operatorname{dist}(\varphi_{n+1}(x), \Phi(x)) \leq \operatorname{dist}(\varphi_{n+1}(x), \Phi_n(x))$, obtenemos

$$\operatorname{dist}(\varphi_{n+1}(x), \Phi(x)) \leq \frac{1}{2^{n+2}}, \qquad \forall x \in \mathbf{E}.$$

De forma similar al caso base, como

$$\|\varphi_n(x) - \varphi_{n+1}(x)\|_{\mathbf{F}} \leq \|\varphi_n(x) - y\|_{\mathbf{F}} + \|y - \varphi_1(x)\|_{\mathbf{F}}, \qquad \forall y \in \Phi_n(x) = \Phi(x) \cap \mathbb{B}_{\mathbf{F}}\left(\varphi_n(x), \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

tenemos que

$$\|\varphi_n(x) - \varphi_{n+1}(x)\|_{\mathbf{F}} \leq \frac{1}{2^{n+1}} + \operatorname{dist}(\varphi_{n+1}(x), \Phi_n(x)) \leq \frac{1}{2^{n+1}}\left(1 + \frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{2^n}.$$

Esto completa la inducción.

Veamos ahora que la sucesión $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a una función continua.

Por una parte tenemos que

$$\|\varphi_{n+m}(x) - \varphi_n(x)\|_{\mathbf{F}} \leq \sum_{k=n}^{n+m} \frac{1}{2^{k+1}}, \qquad \forall x \in \mathbf{E}.$$

Luego, dado que $\mathbf{F}$ es un espacio de Banach, $\varphi(x) := \text{lím}_{k\to+\infty} \varphi_k(x)$ está bien definido para cada $x \in \mathbf{E}$ fijo. Además, no es difícil ver que $\varphi_k \to \varphi$ uniformemente pues

$$\|\varphi(x) - \varphi_n(x)\|_{\mathbf{F}} \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}}, \qquad \forall x \in \mathbf{E},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

En particular, $\varphi : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ es una función continua.

Finalmente, dado que

$$\operatorname{dist}(\varphi_k(x), \Phi(x)) \leq \frac{1}{2^{k+1}}, \qquad \forall x \in \mathbf{E},\ \forall k \in \mathbb{N},$$

obtenemos que $\varphi(x) \in \overline{\Phi(x)}$ para cada $x \in \mathbf{E}$. Pero como $\Phi(x)$ es cerrado, concluimos que φ es una selección continua de Φ.

$\square$

Gracias al teorema de Peano y al teorema de Selección de Michael tenemos el siguiente resultado sobre la existencia de soluciones para inclusiones diferenciales.

Corolario 3.3.4 Supongamos que $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ es una multifunción. Si $\mathscr{O} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ es un abierto, F es s.c.i. en $\mathscr{O}$, y sus imágenes son conjuntos cerrados, convexos y no vacíos, entonces para todo $(t_0, x_0) \in \mathscr{O}$ existe $\delta > 0$ y una trayectoria $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ continuamente diferenciable en el intervalo $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ solución del problema de Cauchy

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)), \qquad \text{para todo } t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta), \qquad x(t_0) = x_0$$

4. Existencia via compacidad

4.1 Dinámicas semicontinuas superiores

Ahora pasaremos a estudiar otra técnica para probar la existencia de trayectorias para inclusiones diferenciales, la cual se basa en argumentos de aproximación y convergencia. En este caso nos enfocaremos en trayectorias que son absolutamente continua (no necesariamente diferenciables).

Definición 4.1.1 Diremos que una función $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es absolutamente continua en el intervalo $[a,b]$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cualquier colección finita de intervalos disjuntos $\{(a_1,b_1),\ldots,(a_m,b_m)\}$ contenidos en $[a,b]$ tenemos que

$$\sum_{i=1}^{m}(b_i - a_i) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{m}|x(b_i) - x(a_i)| < \varepsilon.$$

El conjunto de funciones $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ que son absolutamente continuas en el intervalo $[a,b]$ lo denotaremos $AC([a,b];\mathbb{R}^n)$.

Cabe destacar que $AC([a,b];\mathbb{R}^n)$ admite una representación integral a través del teorema Fundamental del Cálculo.

Recuerdo : Teorema fundamental del cálculo [5, Theorem 3.35]

$x \in AC([a,b];\mathbb{R}^n)$ si y sólo si existe una función $v \in L^1([a,b];\mathbb{R}^n)$ tal que

$$x(t) = x(a) + \int_a^t v(s)ds, \qquad \forall t \in [a,b].$$

En particular tenemos que $\dot{x}(t) = v(t)$ en c.t.p. $t \in [a,b]$ y $AC([a,b];\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}^n \times L^1([a,b];\mathbb{R}^n)$.

Para demostrar el teorema principal de esta sección (Teorema 4.1.3 más abajo) necesitamos estudiar algunos resultados intermedios que son interesantes por sí mismo.

Primero consideremos la siguiente definición que nos será de utilidad más adelante.

Definición 4.1.2 Diremos que una función $\varphi : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ es localmente compacta si para todo $\bar{x} \in \mathbf{E}$ existen $\delta > 0$ y un subconjunto $K \subseteq \mathbf{F}$ compacto tal que $\varphi(x) \in K$ para todo $x \in \mathbb{B}_{\mathbf{E}}(\bar{x}, \delta)$.

El primer resultado intermedio que estudiaremos dice relación con la existencia de una función continua que, en un sentido aproximado, es una selección de una multifunción s.c.s.. Antes de revisar su demostración necesitamos invocar (sin demostar) el siguiente lema técnico.

Lema 4.1 — (7, Theorem 3.20). Supongamos que $(\mathbf{F}, \|\cdot\|_{\mathbf{F}})$ es un espacio de Banach. Si $K \subseteq \mathbf{F}$ es subconjunto compacto, entonces $\overline{\text{co}}(K)$ es compacto.

Teorema 4.1.1 — Selección aproximada. Supongamos que $\Phi\colon \mathbf{E} \rightrightarrows \mathbf{F}$ es una multifunción dada. Si Φ es s.c.s. y sus imágenes son conjuntos cerrados, convexos y no vacíos, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un función continua $\varphi_\varepsilon\colon \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ tal que

$$\text{im}(\varphi_\varepsilon) \subseteq \text{co}\,(\text{im}(\Phi)) \quad \text{y} \quad \text{gr}(\varphi_\varepsilon) \subseteq \text{gr}(\Phi) + \mathbb{B}_{\mathbf{E}\times\mathbf{F}}(\varepsilon)$$

Además, si $(\mathbf{F}, \|\cdot\|_{\mathbf{F}})$ es un espacio de Banach y si existe una selección ψ de Φ que es localmente compacta, entonces para todo $x \in \mathbf{E}$, existen $K \subseteq \mathbf{F}$ compacto, $\delta > 0$ y $\varepsilon_x > 0$ tales que

$$\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_x), \quad \varphi_\varepsilon(\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(x, \delta)) \subseteq K.$$

Demostración. Fijemos $\varepsilon > 0$, luego dado que Φ es s.c.s., para cada $\bar{x} \in \mathbf{E}$ existe $\delta_{\bar{x}} > 0$ tal que

$$\Phi(x) \subseteq \Phi(\bar{x}) + \mathbb{B}_{\mathbf{F}}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), \qquad \forall x \in \mathbb{B}_{\mathbf{F}}(\bar{x}, \delta_{\bar{x}}). \tag{4.1}$$

Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $\delta_{\bar{x}} < 2\varepsilon$.

Sea $\{h_{\bar{x}}\}_{\bar{x}\in\mathbf{E}}$ una partición de la unidad subordinada al cubrimiento $\left\{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}\left(\bar{x}, \frac{\delta_{\bar{x}}}{4}\right)\right\}_{\bar{x}\in\mathbf{E}}$ y $\psi : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ una selección cualquiera de Φ. Consideremos $\varphi_\varepsilon : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ la función dada por

$$\varphi_\varepsilon(x) = \sum_{\bar{x}\in\mathbf{E}} h_{\bar{x}}(x)\psi(\bar{x}), \qquad \forall x \in \mathbf{E}.$$

Sigue que φ_ε es localmente una suma finita de funciones continuas, y por lo tanto es también una función continua. y además, como $\sum_{\bar{x}\in\mathbf{E}} h_{\bar{x}}(x) = 1$ y $\psi(\bar{x}) \in \text{im}(\Phi)$ para todo $\bar{x} \in \mathbf{E}$, tenemos que $\text{im}(\varphi_\varepsilon) \subseteq \text{co}\,(\text{im}(\Phi))$. Fijemos $x \in \mathbf{E}$ y tomemos $x_1, \ldots, x_m \in \mathbf{E}$ tales que

$$h_{\bar{x}}(x) > 0 \quad \iff \quad \bar{x} \in \{x_1, \ldots, x_m\}.$$

En particular, $x \in \text{supp}(h_{x_i}) \subseteq \mathbb{B}_{\mathbf{E}}\left(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{4}\right)$. Reordenando los índices, podemos asumir que $\delta_{x_1} \geq \delta_{x_i}$ para todo $i = 2, \ldots, m$. Esto implica que

$$d_{\mathbf{E}}(x_1, x_i) \leq d_{\mathbf{E}}(x_1, x) + d_{\mathbf{E}}(x, x_i) \leq \frac{\delta_{x_1}}{4} + \frac{\delta_{x_i}}{4} \leq \frac{\delta_{x_1}}{2},$$

y por lo tanto, dado que

$$d_{\mathbf{E}}(x_1, z) \leq d_{\mathbf{E}}(x_1, x_i) + d_{\mathbf{E}}(x_i, z), \qquad \forall z \in \mathbf{E},$$

tenemos que $\mathbb{B}_{\mathbf{E}}\left(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{4}\right) \subseteq \mathbb{B}_{\mathbf{E}}(x_1, \delta_{x_1})$ para todo $i = 2, \ldots, m$. En consecuencia, gracias a (4.1), tenemos que

$$\psi(x_i) \in \Phi\left(\mathbb{B}_{\mathbf{E}}\left(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{4}\right)\right) \subseteq \Phi(\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(x_1, \delta_{x_1})) \subseteq \Phi(x_1) + \mathbb{B}_F\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), \qquad \forall i = 1, \ldots, m.$$

Dado que Φ tiene imágenes convexas, $\Phi(x_1) + \mathbb{B}_F\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ es un conjunto convexo y por lo tanto

$$\varphi_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{m} h_{x_i}(x)\psi(x_i) \in \Phi(x_1) + \mathbb{B}_F\left(\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

En particular, existe $y_{x_1} \in \Phi(x_1)$ tal que $\|\varphi_\varepsilon(x) - y_{x_1}\|_{\mathbf{F}} < \frac{\varepsilon}{2}$. A partir de esto obtenemos que $\mathrm{gr}(\varphi_\varepsilon) \subseteq \mathrm{gr}(\Phi) + \mathbb{B}_{\mathbf{E}\times\mathbf{F}}(\varepsilon)$ pues

$$d_{\mathbf{E}\times\mathbf{F}}((x, \varphi_\varepsilon(x)), (x_1, y_{x_1})) = d_{\mathbf{E}}(x, x_1) + \|\varphi_\varepsilon(x) - y_{x_1}\|_{\mathbf{F}} < \varepsilon.$$

Supongamos ahora que la selección ψ de Φ que es localmente compacta, es decir, existe $\rho > 0$ y $K \subseteq \mathbf{F}$ compacto tal que $\psi(z) \subseteq K$ para todo $z \in \mathbb{B}_{\mathbf{E}}(x, \rho)$. Notemos que gracias al lema 4.1 podemos asumir que K es un conjunto compacto (reemplazando K por $\overline{\mathrm{co}}(K)$ si fuese necesario). Sea $\delta \in \left(0, \frac{\rho}{2}\right)$ tal que

$$\varphi_\varepsilon(z) = \sum_{i=1}^{m} h_{x_i}(z)\psi(x_i) \quad \text{con } h_{x_i}(z) > 0, \qquad \forall z \in \mathbb{B}_E(x, \delta).$$

Luego sigue que $z \in \mathbb{B}_{\mathbf{E}}(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{4})$. Tomando $\varepsilon_x = \rho$ y $\delta = \frac{\rho}{2}$, asumiendo que $\varepsilon \in (0, \varepsilon_x)$ y recordando que $\delta_{x_i} < 2\varepsilon$, tenemos que

$$d_{\mathbf{E}}(x_i, x) \leq d_{\mathbf{E}}(x_i, z) + d_{\mathbf{E}}(z, x) < \frac{\delta_{x_i}}{4} + \delta < \frac{\varepsilon}{2} + \delta < \frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{2} = \rho, \qquad \forall z \in \mathbb{B}_{\mathbf{E}}(x, \delta) \cap \mathbb{B}_{\mathbf{E}}(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{4}).$$

En particular, $\psi(x_i) \in K$ y por lo tanto, $\varphi_\varepsilon(z) \in \mathrm{co}(K) = K$ para todo $z \in \mathbb{B}_E(x, \delta)$. □

Ahora veremos un resultado que nos asegura que soluciones aproximadas de inclusiones diferenciales convergen efectivamente a trayectorias de inclusiones diferenciales.

Teorema 4.1.2 — Teorema de Convergencia. Supongamos que $\mathscr{O} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y que $F \colon \mathscr{O} \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ es una multifunción s.c.s. cuyas imágenes son conjuntos convexos y cerrados. Supongamos que para cada $k \in \mathbb{N}$ tenemos $x_k \colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ y $v_k : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ funciones medibles que satisfacen

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ c.t.p. } t \in [a,b], \ \exists k_0 \in \mathbb{N}, \text{ tal que } \quad (t, x_k(t), v_k(t)) \in \mathrm{gr}(F) + \mathbb{B}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}(\varepsilon), \quad \forall k \geq k_0.$$

Si $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge c.t.p. a $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq L^1([a,b];\mathbb{R}^n)$ y converge débilmente en $L^1([a,b];\mathbb{R}^n)$ a $v \in L^1([a,b];\mathbb{R}^n)$, entonces

$$v(t) \in F(t, x(t)), \qquad \text{c.t.p. } t \in [a,b].$$

Demostración. Definamos para cada $k \in \mathbb{N}$ el conjunto $M_k := \overline{\mathrm{co}}\left(\{v_{k+m}\}_{m\in\mathbb{N}}\right)$. Por definición, tenemos que M_k es un conjunto convexo cerrado (fuerte) y no vacío de $L^1([a,b];\mathbb{R}^n)$. En particular, es un conjunto cerrado débil y por lo tanto, $v \in M_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ (gracias al Lema de Mazur).

Luego, para cada $k \in \mathbb{N}$, podemos encontrar $w_k \in \operatorname{co}\left(\{v_{k+m}\}_{m\in\mathbb{N}}\right)$ tal que $w_k \to v$ fuertemente en $L^1([a,b];\mathbb{R}^n)$. Pasando a una subsucesión si fuese necesario, podemos asumir que $w_k \to v$ c.t.p. en $[a,b]$.

Sea $I = \{t \in [a,b] \mid x_k(t) \to x(t),\ w_k(t) \to v(t)\}$, tal que $\mu_1(I) = \mu_1([a,b]) = b-a$. Para concluir bastará probar que $v(t) \in F(t,x(t))$ para todo $t \in I$. Para ver esto, es suficiente probar que

$$\sup_{v\in F(t,x(t))} v\top p \geq v(t)^\top p, \qquad \forall p \in \mathbb{R}^n.$$

Esto último se debe al hecho que, al ser $F(t,x(t))$ cerrado, convexo y no vacío, esto último es equivalente a $\delta_{F(t,x(t))} \leq \delta_{v(t)}$, con δ_A siendo la función indicatriz del conjunto A (ie. $\delta_A(v) = 0$ si $v \in A$ y $\delta_A(v) = +\infty$ si no).

Notemos que la desigualdad es directa si $p = 0$ o si $\sup_{v\in F(t,x(t))} v^\top p = +\infty$ para $t \in I$, luego basta enfocarnos en el caso $p \neq 0$ y cuando el supremo es finito. Más aún, como la desigualdad es homogénea respecto a p, basta considerar el caso $\|p\|_{\mathbb{R}^N} = 1$. Sea $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ con $\|p\|_{\mathbb{R}^n} = 1$, $t \in I$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que

$$\sup_{v\in F(t,x(t))} v^\top p < \lambda.$$

Dado que F es s.c.s. tenemos que existe $\delta > 0$ tal que

$$F(s,z) \subseteq F(t,x(t)) + \mathbb{B}_{\mathbb{R}^n}\left(\lambda - \sup_{v\in F(t,x(t))} v^\top p\right), \qquad \forall (s,z) \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n}((t,x(t)),\delta) \subseteq \mathscr{O}.$$

A partir de esta inclusión deducimos que

$$\sup_{v\in F(s,z)} v^\top p \leq \sup_{v\in F(t,x(t))} v^\top p + \left(\lambda - \sup_{v\in F(t,x(t))} v^\top p\right) = \lambda, \qquad \forall (s,z) \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n}((t,x(t)),\delta).$$

Dado que $x_k(t) \to x(t)$, existe $k_t \in \mathbb{N}$ tal que $x_k(t) \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}^n}\left(x(t), \frac{\delta}{2}\right)$, para todo $k \geq k_t$.

Por otro lado, por hipótesis del enunciado, dado $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq k_0$ podemos encontrar $(s_k, y_k, q_k) \in \operatorname{gr}(F)$ que satisfacen

$$|s_k - t| + \|y_k - x_k(t)\|_{\mathbb{R}^n} + \|q_k - v_k(t)\|_{\mathbb{R}^n} < \text{mín}\left\{\frac{\delta}{2}, \varepsilon\right\}, \qquad \forall k \geq k_0.$$

Notemos que

$$|s_k - t| + \|y_k - x(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq |s_k - t| + \|y_k - x_k(t)\|_{\mathbb{R}^n} + \|x_k(t) - x(t)\|_{\mathbb{R}^n} < \delta, \qquad \forall k \geq \text{máx}\{k_0, k_t\}.$$

En consecuencia, tenemos que

$$q_k^\top p \leq \sup_{q\in F(s_k,y_k)} q^\top p \leq \lambda, \qquad \forall k \geq \text{máx}\{k_0, k_t\}.$$

Por lo tanto,

$$v_k(t)^\top p \leq q_k^\top p + (v_k(t) - q_k)^\top p \leq \lambda + \|v_k(t) - q_k\|_{\mathbb{R}^n} < \lambda + \varepsilon, \qquad \forall k \geq \text{máx}\{k_0, k_t\}.$$

Ahora bien, dado que $w_k \in \operatorname{co}\left(\{v_{k+m}\}_{m\in\mathbb{N}}\right)$, también tenemos que

$$w_k(t)^\top p < \lambda + \varepsilon, \qquad \forall k \geq \text{máx}\{k_0, k_t\},$$

y a posteriori

$$v(t)^\top p \leq \lambda + \varepsilon.$$

Finalmente, haciendo $\varepsilon \to 0$ y $\lambda \to \sup_{v\in F(t,x(t))} v^\top p$ obtenemos la desigualdad buscada, y podemos concluir que $v(t) \in F(t,x(t))$ para todo $t \in I$. □

Finalmente, para demostrar la existencia de soluciones a inclusiones diferenciales para el caso de dinámicas s.c.s. necesitamos el siguiente resultado sobre la compacidad de trayectorias absolutamente continuas.

Lema 4.2 — Compacidad en $AC([a,b];\mathbb{R}^n)$**.** Supongamos $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq AC([a,b];\mathbb{R}^n))$ es una sucesión tal que $\{x_k(t)\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ es acotada para cada $t \in [a,b]$ fijo y para la cual existe una función $\alpha \in L^1([a,b];\mathbb{R}^n)$ positiva que verifica

$$\|\dot{x}_k(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \alpha(t), \qquad \forall k \in \mathbb{N},\ \text{c.t.p. } t \in [a,b].$$

Entonces existe $x \in AC([a,b];\mathbb{R}^n)$ y una subsucesión $\{x_{k_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $\{x_{k_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a x en $(C([a,b];\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$ y $\dot{x}_{k_i}$ converge débilmente a $\dot{x}$ en $L^1([a,b];\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Consideremos la función $z\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$z(t) := \int_a^t \alpha(s)ds, \qquad \forall t \in [a,b].$$

Notemos que, dado que $\alpha \in L^1([a,b];\mathbb{R}^n)$, tenemos que $z \in C([a,b];\mathbb{R}^n)$ y por lo tanto también es uniformemente continua. Esto implica que

$$\|x_k(t_1) - x_k(t_2)\|_{\mathbb{R}^n} = \left\| \int_{t_1}^{t_2} \dot{x}_k(s)ds \right\|_{\mathbb{R}^n} \leq \left| \int_{t_1}^{t_2} \alpha(s)ds \right| \leq |z(t_1) - z(t_2)|, \qquad \forall t_1, t_2 \in [a,b].$$

Luego, como z es uniformemente continua, tenemos que la sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es equi-continua. Por lo tanto, dado que $\{x_k(t)\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ es acotada para cada $t \in [a,b]$ fijo, por el Teorema de Arzelá-Ascoli tenemos que existe una función $x \in C([a,b];\mathbb{R}^n)$ y una subsucesión $\{x_{k_i}\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq C([a,b];\mathbb{R}^n)$ tal que $\{x_{k_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a x.

Por otro lado, para cada $k \in \mathbb{N}$ consideremos una función medible $w_k\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ que verifica

$$w_k(t) := \frac{1}{\alpha(t)} \dot{x}_k(t), \qquad \text{c.t.p. } t \in [a,b].$$

Notemos que $\|w_k\|_{L^\infty} \leq 1$, luego dado que $L^1([a,b];\mathbb{R}^n)$ es separable, por el Teorema de Banach-Alaoglu, tenemos que existe $\bar{w} \in L^\infty([a,b];\mathbb{R}^n)$ y una subsucesión (que denotaremos igual que antes) $\{w_{k_i}\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq L^\infty([a,b];\mathbb{R}^n)$ tal que $w_{k_i} \overset{*}{\rightharpoonup} \bar{w}$ débilmente en $\sigma\left(L^\infty([a,b];\mathbb{R}^n), L^1([a,b];\mathbb{R}^n)\right)$ (topología débil-$*$ en $L^\infty([a,b];\mathbb{R}^n)$, este último siendo visto como dual de $L^1([a,b];\mathbb{R}^n)$).

Notemos también que el operador lineal $T : L^\infty([a,b];\mathbb{R}^n) \to L^1([a,b];\mathbb{R}^n)$ definido por

$$T(w) = \alpha w, \qquad \forall w \in L^\infty[0,1].$$

es continuo si en $L^\infty([a,b];\mathbb{R}^n)$ se considera la topología débil-$*$ $\sigma\left(L^\infty([a,b];\mathbb{R}^n), L^1([a,b];\mathbb{R}^n)\right)$ y en $L^1([a,b];\mathbb{R}^n)$ la topología débil $\sigma\left(L^1([a,b];\mathbb{R}^n), L^\infty([a,b];\mathbb{R}^n)\right)$. En efecto, dados $\varepsilon > 0$ y $z_1, \ldots, z_m \in L^\infty([a,b];\mathbb{R}^n)$ el conjunto

$$V = \left\{ v \in L^1([a,b];\mathbb{R}^n) \mid \left| \int_a^b z_i(t)^\top v(t)dt \right| < \varepsilon,\ i = 1, \ldots, m \right\}$$

es una vecindad abierta débil de $v = 0 \in L^1([a,b];\mathbb{R}^n)$. Sigue que

$$\begin{aligned} T^{-1}(V) &= \left\{ w \in L^\infty([a,b];\mathbb{R}^n) \mid \left| \int_a^b z_i(t)^\top T(w)(t)dt \right| < \varepsilon,\ i = 1,\dots,m \right\} \\ &= \left\{ w \in L^\infty([a,b];\mathbb{R}^n) \mid \left| \int_a^b \alpha(t) z_i(t)^\top w(t)dt \right| < \varepsilon,\ i = 1,\dots,m \right\} \end{aligned}$$

Dado que $\alpha z_i \in L^1([a,b];\mathbb{R}^n)$ para cada $i = 1,\dots,m$, tenemos que $T^{-1}(V)$ es una vecindad abierta débil-$*$ de $w = T(0) = 0 \in L^\infty([a,b];\mathbb{R}^n)$, concluimos que T es continuo en $w = 0$ si en $L^\infty([a,b];\mathbb{R}^n)$ se considera la topología débil-$*$ y en $L^1([a,b];\mathbb{R}^n)$ la topología débil. Más aún, como T es lineal y tanto $L^\infty([a,b];\mathbb{R}^n)$ como $L^1([a,b];\mathbb{R}^n)$ dotados de las correspondientes topologías débiles son espacios vectoriales topológicos, concluimos que T es continuo en todo $L^\infty([a,b];\mathbb{R}^n)$.

Finalmente, como $w_{k_i} \overset{*}{\rightharpoonup} \bar{w}$ débilmente en $\sigma\left(L^\infty([a,b];\mathbb{R}^n), L^1([a,b];\mathbb{R}^n)\right)$, por la continuidad de T tenemos también que $\dot{x}_{k_i} = T(w_{k_i}) \rightharpoonup T(\bar{w}) = \alpha\bar{w}$ débilmente en $\sigma\left(L^1([a,b];\mathbb{R}^n), L^\infty([a,b];\mathbb{R}^n)\right)$. Esto a su vez implica que, pasando al límite en la igualdad

$$x_{k_i}(t) = x_{k_i}(a) + \int_a^t \dot{x}_{k_i}(s)ds = x_{k_i}(0) + \int_a^b \dot{x}_{k_i}(s)\chi_{[a,t]}(s)ds, \qquad \forall t \in [a,b]$$

donde $\chi_{[a,t]} \in L^\infty([a,b];\mathbb{R})$ es la función indicadora del intervalo $[a,t]$, obtenemos

$$x(t) = x(0) + \int_a^t \alpha(s)\bar{w}(s)ds, \qquad \forall t \in [a,b],$$

es decir, $\dot{x} = \alpha\bar{w} \in L^1([a,b];\mathbb{R}^n)$. Con esto terminamos la demostración. □

Ahora tenemos las herramientas necesarias para probar el teorema de existencia para el caso de dinámicas s.c.s.

Teorema 4.1.3 Supongamos que $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $F\colon \mathcal{O} \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ es una multifunción dada. Si F es s.c.s., sus imágenes son conjuntos cerrados, convexos y no vacíos y si existe una selección de F que es localmente compacta, entonces para todo $(t_0,x_0) \in \mathcal{O}$ existe $T > t_0$ y una trayectoria $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ absolutamente continua en $[t_0,T]$ solución del problema de Cauchy

$$\dot{x}(t) \in F(t,x(t)), \qquad \text{c.t.p. } t \in [t_0,T], \qquad x(t_0) = x_0$$

Demostración. Notemos que por el Teorema de selección aproximada (Teorema 4.1.1) tenemos que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe una función continua $f_k : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$\mathrm{gr}(f_k) \subseteq \mathrm{gr}(F) + \mathbb{B}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{k+1}\right).$$

Además, como existe una selección de F que es localmente compacta, también tenemos que existen $\delta > 0$ y $R > 0$ tales que

$$\|f_k(t,x)\| \leq R, \qquad \forall (t,x) \in Q_\delta := \{(s,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \mid |s-t_0| < \delta,\ \|y-x_0\|_{\mathbb{R}^n} < \delta\} \subseteq \mathcal{O}.$$

Por otro lado, consideremos el problema de Cauchy (EDO) siguiente:

$$\dot{x}_k(t) = f_k(t,x_k(t)), \quad x_k(t_0) = x_0. \tag{4.2}$$

Gracias al Teorema de Peano, tenemos que (4.2) admite una solución definida en un intervalo maximal $[t_0, \tau_k)$, con

$$\lim_{t\to\tau_k^-} \|x_k(t)\|_{\mathbb{R}^n} = +\infty \qquad \text{o bien} \qquad \lim_{t\to\tau_k^-} \operatorname{dist}((t,x_k(t)),\mathscr{O}^c) = 0.$$

Notemos que

$$\|\dot{x}_k(t)\|_{\mathbb{R}^n} = \|f_k(t,x_k(t))\| \leq R, \qquad \forall (t,x_k(t)) \in Q_\delta$$

y por lo tanto

$$\|x_k(t) - x_0\|_{\mathbb{R}^n} \leq \int_{t_0}^{t} \|\dot{x}_k(s)\|_{\mathbb{R}^n} ds \leq R(t-t_0), \qquad \forall (t,x_k(t)) \in Q_\delta.$$

Esto implica que si tomamos $T = t_0 + \text{mín}\{\delta, \frac{\delta}{R}\}$, entonces $T \in (t_0, \tau_k)$ pues $(t,x_k(t)) \in Q_\delta$ para todo $t \in [t_0,T]$ y además se cumple que

$$\|\dot{x}_k(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq R \quad \text{y} \quad \|x_k(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \|x_0\|_{\mathbb{R}^n} + RT, \qquad \forall k \in \mathbb{N},\ \forall t \in [t_0,T].$$

Ahora bien, por el Lema 4.2 existe una función $x \in AC([t_0,T];\mathbb{R}^n)$ y una subsucesión tal que $x_{k_j} \to x$ uniformemente en $[t_0,T]$ y $\dot{x}_{k_j} \rightharpoonup \dot{x}$ débilmente en $L^1([t_0,T];\mathbb{R}^n)$. Dado que

$$x_{k_j}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \dot{x}_{k_j}(s)ds, \qquad \forall t \in [t_0,T],\ \forall j \in \mathbb{N},$$

y la función $\mathbb{1}_{[t_0,t]} \in L^\infty([t_0,T];\mathbb{R})$, haciendo $j \to +\infty$, tenemos que

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \dot{x}(s)ds, \qquad \forall t \in [t_0,T].$$

Finalmente, dado que

$$\operatorname{dist}\big(t,x_{k_j}(t),\dot{x}_{k_j}(t),\operatorname{gr}(F)\big) = \operatorname{dist}\big(t,x_{k_j}(t),f_k(t,x_{k_j}(t)),\operatorname{gr}(F)\big) \leq \frac{1}{k_j+1}, \qquad \forall j \in \mathbb{N},\ \text{c.t.p. } t \in [t_0,T],$$

gracias al Teorema de Convergencia (Teorema 4.1.2) obtenemos que

$$\dot{x}(t) \in F(t,x(t)), \qquad \text{c.t.p. } t \in [t_0,T], \qquad x(t_0) = x_0$$

□

4.2 Dinámicas mediblemente semicontinuas superior

Hasta ahora hemos considerado en general sistemas dinámicos no autónomos, es decir, sistemas con una dependencia explícita respecto a la variable temporal. Sin embargo, la regularidad que hemos pedido a las dinámicas es la misma tanto para la variable espacial como para la temporal. En esta sección consideraremos el caso donde la regularidad respecto a la variable temporal es menor que la regularidad respecto a la variable espacial. La regularidad con la que buscamos trabajar en esta parte es el análogo de medibilidad de funciones llevado al contexto de multifunciones.

4.2.1 Multifunciones medibles

Definición 4.2.1 Supongamos que $(\Omega, \mathscr{T})$ es un espacio de medida. Diremos que una multifunción $\Phi\colon \Omega \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ es $\mathscr{T}$-medible si para todo conjunto abierto $\mathscr{O} \subseteq \mathbb{R}^m$ el conjunto $\Phi^{-1}(\mathscr{O})$ es medible, es decir,

$$\Phi^{-1}(\mathscr{O}) := \{\omega \in \Omega \mid \Phi(\omega) \cap \mathscr{O} \neq \emptyset\} \in \mathscr{T}$$

Recuerdo : Espacio de medida usuales

- La σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^n$, denotada $\mathscr{B}^n$, es la σ-álgebra más pequeña (en el sentido de la inclusión) que contiene a todos los abiertos de $\mathbb{R}^n$. Si $A \in \mathscr{B}^n$, diremos que A es $\mathscr{B}$-medible o que A es un Boreliano.
- La σ-álgebra de Lebesgue en $\mathbb{R}$, denotada $\mathscr{L}$, es la σ-álgebra completa más pequeña que contiene a los Borelianos en $\mathbb{R}$. Si $A \in \mathscr{L}$, diremos que A es $\mathscr{L}$-medible o simplemente que A es medible.
- La σ-álgebra de Lebesgue-Borel en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, denotada $\mathscr{L} \otimes \mathscr{B}^n$, es la σ-álgebra más pequeña que contiene a $\mathscr{L} \times \mathscr{B}^n := \{A \times B \mid A \in \mathscr{L},\ B \in \mathscr{B}^n\}$. Si $A \in \mathscr{L} \times \mathscr{B}^n$, diremos que A es $\mathscr{L} \times \mathscr{B}$-medible

Veamos ahora una caracterización de la medibilidad de una multifunción en respecto a la σ-álgebra de Lebesgue en terminos del grafo de la multifunción. Para demostrar caracterización necesitamos del siguiente resultado de Teoría de la Medida.

Lema 4.3 — Teorema de proyección medible (3, Theorem III.23). Si $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ es $\mathscr{L} \times \mathscr{B}$-medible, entonces $\{t \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } (t,x) \in G\}$ es $\mathscr{L}$-medible.

Proposición 4.2.1 Supongamos que $\Phi\colon \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ es una multifunción dada. Si $\Phi(t)$ es un subconjunto cerrados (posiblemente vacío) para cada $t \in \mathbb{R}$, entonces Φ es $\mathscr{L}$-medible si y sólo si $\mathrm{gr}(\Phi)$ es un conjunto $\mathscr{L} \times \mathscr{B}$-medible de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$.

Demostración. Supongamos primero que $\mathrm{gr}(\Phi)$ es un conjunto $\mathscr{L} \times \mathscr{B}$-medible de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$. Luego, dado $A \subseteq \mathbb{R}^m$ abierto tenemos que el conjunto

$$G = \mathrm{gr}(\Phi) \bigcap \mathbb{R} \times A$$

es $\mathscr{L} \times \mathscr{B}$-medible y por el Teorema de proyección medible (Lema 4.3) tenemos que

$$P := \{t \in \mathbb{R} \mid \exists v \in \mathbb{R}^m \text{ tal que } (t,v) \in \mathrm{gr}(\Phi) \cap \mathbb{R} \times A\}$$

es $\mathscr{L}$-medible. Notando que

$$P = \{t \in \mathbb{R} \mid \exists v \in \mathbb{R}^m \text{ tal que } v \in \Phi(t) \cap A\} = \{t \in \mathbb{R} \mid \Phi(t) \cap A \neq \emptyset\}$$

concluimos que Φ es $\mathscr{L}$-medible.

Supongamos ahora que Φ es $\mathscr{L}$-medible y fijemos $t \in \mathbb{R}$. Dado que $\Phi(t)$ es un conjunto cerrado, tenemos que $v \in \Phi(t)$ si y sólo si

$$\forall \rho \in \mathbb{Q}_+,\ \exists a \in \mathbb{Q}^n \quad \text{tal que } v \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}^m}(a,\rho) \text{ y } \Phi(t) \cap \mathbb{B}_{\mathbb{R}^m}(a,\rho) \neq \emptyset.$$

Luego, sigue que

$$(t,v) \in \mathrm{gr}(\Phi) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \rho \in \mathbb{Q}_+,\ \exists a \in \mathbb{Q}^n \quad \text{tal que } v \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}^m}(a,\rho) \text{ y } t \in \Phi^{-1}\left(\mathbb{B}_{\mathbb{R}^m}(a,\rho)\right).$$

A partir de esto obtenemos

$$\mathrm{gr}(\Phi) = \bigcap_{\rho \in \mathbb{Q}_+} \bigcup_{a \in \mathbb{Q}^n} \Phi^{-1}\left(\mathbb{B}_{\mathbb{R}^m}(a,\rho)\right) \times \mathbb{B}_{\mathbb{R}^m}(a,\rho).$$

Dado que los conjuntos $\Phi^{-1}\left(\mathbb{B}_{\mathbb{R}^m}(a,\rho)\right) \times \mathbb{B}_{\mathbb{R}^m}(a,\rho)$ son todos $\mathscr{L} \times \mathscr{B}$ medibles, y tanto las intersecciones como las uniones en la igualdad anterior son numerables, concluimos que $\mathrm{gr}(\Phi)$ es $\mathscr{L} \times \mathscr{B}$ medible. □

Ahora veremos resultado importante que nos asegura la existence se selecciones medibles.

Teorema 4.2.2 — Selección medible. Supongamos que $(\Omega, \mathscr{T})$ es un espacio de medida. Si $\Phi\colon \Omega \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ es $\mathscr{T}$-medible y sus imágenes son conjuntos cerrados y no vacíos, entonces existe una selección $\mathscr{T}$-medible de Φ.

Demostración. Sea $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ un conjunto denso numerable de $\mathbb{R}^m$. Dado $\omega \in \Omega$, definamos

$$p(\omega) := \inf\{k \in \mathbb{N} \mid \Phi(\omega) \cap \mathbb{B}_{\mathbb{R}^m}\left(y_k, \frac{1}{2}\right) \neq \emptyset\}.$$

Dado que $\Phi(\omega) \neq \emptyset$, el ínfimo se alcanza. Definamos ahora

$$\varphi_0(\omega) = y_{p(\omega)}, \qquad \forall \omega \in \Omega.$$

Esta función es medible. En efecto, definamos para cada $k \in \mathbb{N}$ el conjunto

$$A_k := \{\omega \in \Omega \mid \Phi(\omega) \cap \mathbb{B}_{\mathbb{R}^m}\left(y_k, \frac{1}{2}\right) \neq \emptyset\}.$$

Dado que $\Phi\colon \Omega \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ es $\mathscr{T}$-medible, tenemos que cada A_k es un conjunto $\mathscr{T}$-medible. Consideremos también los conjuntos $\mathscr{T}$-medible

$$M_p := A_p \setminus \bigcup_{k=0}^{p-1} A_k, \qquad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Notemos que

$$\varphi_0(\omega) = \sum_{p\in\mathbb{N}} y_p \mathbb{1}_{M_p}(\omega), \qquad \forall \omega \in \Omega.$$

Dado que la función de la derecha es una función medible, concluimos que φ_0 también lo es. Notemos también que $\mathrm{dist}\left(\varphi_0(\omega), \Phi(\omega)\right) < \frac{1}{2}$ para todo $\omega \in \Omega$.

Definamos ahora $S_k = \{\omega \in \Omega \mid \varphi_0(\omega) = y_k\}$. Por definición es fácil ver que $S_k \neq S_l$ si $k \neq l$ y además $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} S_k = \Omega$. Para cada $\omega \in \Omega$, sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $\omega \in S_k$ y definamos

$$q(\omega) := \inf\left\{i \in \mathbb{N} \mid \Phi(\omega) \cap \mathbb{B}_{\mathbb{R}^m}\left(y_k, \frac{1}{2}\right) \cap \mathbb{B}_{\mathbb{R}^m}\left(y_i, \frac{1}{2^2}\right) \neq \emptyset\right\}.$$

Dado que $\Phi(\omega) \cap \mathbb{B}_{\mathbb{R}^m}\left(y_k, \frac{1}{2}\right) \neq \emptyset$, tenemos que $q(\omega) \in \mathbb{N}$. Consideremos ahora la función

$$\varphi_1(\omega) = y_{q(\omega)}, \qquad \forall \omega \in \Omega.$$

De forma similar a lo hecho con φ_0, tenemos que φ_1 es también una función medible.

Tomemos $\bar{y} \in \Phi(\omega) \cap \mathbb{B}_{\mathbb{R}^m}\left(y_k, \frac{1}{2}\right) \cap \mathbb{B}_{\mathbb{R}^m}\left(y_{q(\omega)}, \frac{1}{2^2}\right)$, luego sigue que

$$\|\varphi_0(\omega) - \varphi_1(\omega)\|_{\mathbb{R}^m} = \|y_k - y_{q(\omega)}\|_{\mathbb{R}^m} \leq \|y_k - \bar{y}\|_{\mathbb{R}^n} + \|\bar{y} - y_{q(\omega)}\|_{\mathbb{R}^n} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} < 1$$

Más aún, también tenemos que

$$\operatorname{dist}(\varphi_1(\omega), \Phi(\omega)) \leq \|\varphi_1(\omega) - \bar{y}\|_{\mathbb{R}^m} < \frac{1}{2^2}.$$

A partir de esto, y usando inducción, podemos construir una sucesión de funciones medibles $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ que son $\mathscr{T}$-medibles y que verifican

$$\|\varphi_k(\omega) - \varphi_{k+1}(\omega)\|_{\mathbb{R}^m} < \frac{1}{2^k} \qquad \text{and} \qquad \operatorname{dist}(\varphi_k(\omega), \Phi(\omega)) < \frac{1}{2^{k+1}}, \qquad \forall \omega \in \Omega.$$

En particular, para cada $\omega \in \Omega$, tenemos que$\{\varphi_k(\omega)\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^m$, y por lo tanto converge puntualmente a una función φ, que también es $\mathscr{T}$- medible. Además, puntualmente tenemos que $\operatorname{dist}(\varphi_k(\omega), \Phi(\omega)) \to 0$ y por lo tanto $\operatorname{dist}(\varphi(\omega), \Phi(\omega)) = 0$. Dado que $\Phi(\omega)$ es un conjunto cerrado, concluimos que φ es una selección medible de Φ. □

4.2.2 Teorema de Castaing

El resultado principal que estudiaremos en ahora, el teorema de Castaing, trata el caso de multifunciones mediblemente semicontinuas superior en el sentido de la siguiente definición.

Definición 4.2.2 Diremos que una multifunción $F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ es mediblemente semicontinuas superior (abreviado mediblemente s.c.s.) si:

- para todo $t \in \mathbb{R}$ fijo, la multifunción $x \mapsto F(t,x)$ es s.c.s.;
- para todo $x \in \mathbb{R}^n$ fijo, la multifunción $t \mapsto F(t,x)$ es $\mathscr{L}$-medible.

La demostración del teorema de Castaing requiere de algunos resultados previos que veremos a continuación: Proposición 4.2.3 y Teorema 2.2.6.

Proposición 4.2.3 Supongamos que $\mathscr{O} \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto no vacío y $F\colon [a,b] \times \mathscr{O} \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ es una multifunción dada. Si F es mediblemente s.c.s. en $[a,b] \times \mathscr{O}$, sus imágenes son conjuntos compactos no vacíos y $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ es una función medible tal que $x(t) \in \mathscr{O}$ para todo $t \in [a,b]$, entonces existe una multifunción $\Gamma : [a,b] \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ $\mathscr{L}$-medible, cuyas imágenes son conjuntos compactos y no vacíos tal que $\Gamma(t) \subseteq F(t,x(t))$ para todo $t \in [a,b]$.

En particular, existe una selección medible en $[a,b]$ para la multifunción $t \mapsto F(t,x(t))$.

Demostración. Dado que $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ es una función medible, existe una sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de funciones simples que convergen c.t.p. a x, donde

$$x_k(t) = \sum_{i=1}^{m_k} a_i^k \mathbb{1}_{A_i^k}(t), \qquad \text{donde cada } a_i^k \in \mathbb{R}^n \text{ y } A_i^k \subseteq [a,b] \text{ es un conjunto } \mathscr{L}\text{-medible.}$$

Definamos $F_k(t) := F(t, x_k(t))$ c.t.p. $t \in [a,b]$. Notemos que F_k es una multifunción medible pues

$$F_k^{-1}(A) = \{t \in [a,b] \mid F(t,x_k(t)) \cap A \neq \emptyset\} = \{t \in [a,b] \mid \exists i \in \{1,\dots,m_k\},\ t \in A_i^k,\ F(t,a_i^k) \cap A \neq \emptyset\}$$

Luego, si A es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^m$ tenemos que $F_k^{-1}(A)$ es una unión finita de conjuntos $\mathscr{L}$-medibles, y por lo tanto medible:

$$F_k^{-1}(A) = \bigcup_{i=1}^{m_k} \{t \in A_i^k \mid F(t,a_i^k) \cap A \neq \emptyset\}.$$

Definamos ahora una multifunción $\Gamma : [a,b] \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ via la fórmula

$$\Gamma(t) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{i=k}^{+\infty} F_i(t)}, \qquad \text{c.t.p. } t \in [a,b].$$

Dado que $\Gamma(t)$ es la intersección (numerable) de conjuntos cerrados, también tenemos que $\Gamma(t)$ es cerrado. Veamos que verifica las condiciones del enunciado.

Fijemos $t \in [a,b]$, luego dado que $x \mapsto F(t,x)$ es s.c.s. en $x(t)$, tenemos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$F_i(t) = F(t,x_k(t)) \subseteq F(t,x(t)) + \mathbb{B}_{\mathbb{R}^m}\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right), \qquad \forall i \geq k_0.$$

Sigue que

$$\bigcup_{i=k_0}^{+\infty} F_i(t) \subseteq F(t,x(t)) + \overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^m}\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right).$$

Notemos que el conjunto de la derecha en la inclusión anterior es un conjunto compacto de $\mathbb{R}^m$; es suma de dos conjuntos compactos. En particular es cerrado y por lo tanto tenemos

$$\Gamma(t) \subseteq \overline{\bigcup_{i=k_0}^{+\infty} F_i(t)} \subseteq F(t,x(t)) + \overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^m}\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right) \subseteq F(t,x(t)) + \mathbb{B}_{\mathbb{R}^m}(\varepsilon).$$

Haciendo $\varepsilon \to 0$ y recordando que $\Gamma(t)$ es cerrado y $F(t,x(t))$ es un conjunto compacto obtenemos $\Gamma(t)$ es compacto con

$$\Gamma(t) \subseteq \overline{F(t,x(t))} = F(t,x(t)).$$

Por otro lado, también tenemos que $\Gamma(t) \neq \emptyset$. En efecto, si denotamos $C_k := \overline{\bigcup_{i=k}^{+\infty} F_i(t)}$, por el análisis hecho más arriba, tenemos que cada C_k es un conjunto compacto. Además, es fácil ver que $\{C_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una familia decreciente de conjuntos respecto a la inclusión, y por lo tanto verifica la propiedad de la intersección finita. Dado que todos los C_k son conjuntos compactos, concluimos que

$$\Gamma(t) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C_k \neq \emptyset.$$

Para finalizar, debemos probar que $t \mapsto \Gamma(t)$ es $\mathscr{L}$-medible. Para esto consideremos primero para cada $k \in \mathbb{N}$ la multifunción $\Gamma_k : [a,b] \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ dada por la fórmula

$$\Gamma_k(t) = \overline{\bigcup_{i=k}^{+\infty} F_i(t)}, \qquad \text{c.t.p. } t \in [a,b].$$

Cada $t \mapsto \Gamma_k(t)$ es $\mathscr{L}$-medible pues por definición tenemos que si $A \subseteq \mathbb{R}^m$ es un conjunto abierto, entonces

$$\Gamma_k^{-1}(A) = \{t \in [a,b] \mid \Gamma_k(t) \cap A \neq \emptyset\} = \left\{t \in [a,b] \mid \bigcup_{i=k}^{+\infty} F_i(t) \cap A \neq \emptyset\right\} = \bigcup_{i=k}^{+\infty} \{t \in [a,b] \mid F_i(t) \cap A \neq \emptyset\},$$

siendo los conjuntos dentro de la unión todos $\mathscr{L}$-medibles, puesto que cada multifunción $t \mapsto F_i(t)$ lo es. Notemos por otro lado que $\Gamma = \cap_{k \in \mathbb{N}} \Gamma_k$ y por lo tanto

$$\mathrm{gr}\,(\Gamma) = \{(t,v) \in [0,1] \times \mathbb{R}^m \mid v \in \Gamma_k(t),\ \forall k \in \mathbb{N}\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{gr}\,(\Gamma_k)\,.$$

Luego, usando la Proposición 4.2.1 concluimos que Γ es una multifunción $\mathscr{L}$-medible.

□

Teorema 4.2.4 — Castaing. Supongamos que $\mathscr{O} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto y $F : \mathscr{O} \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ es una multifunción dada. Si F es mediblemente s.c.s., sus imágenes son conjuntos convexos, compactos no vacíos, y existe una función $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrable ($\mathscr{L}$-medible) y positiva tal que

$$\|v\|_{\mathbb{R}^n} \leq \alpha(t), \qquad \forall (t,x) \in \mathscr{O},\ v \in F(t,x),$$

entonces para todo $(t_0,x_0) \in \mathscr{O}$ existe $T > t_0$ y una trayectoria $x \in AC([t_0,T];\mathbb{R}^n)$ solución del problema de Cauchy

$$\dot{x}(t) \in F(t,x(t)), \qquad \text{en c.t.p. } t \in [t_0,T], \qquad x(t_0) = x_0$$

Demostración. Consideremos $T > t_0$ definido de la siguiente forma:

$$T = \text{máx}\left\{t \in [t_0, t_0+1] \mid \int_{t_0}^{t} \alpha(s)ds \leq \frac{1}{2}\,\mathrm{dist}\,((t_0,x_0), \mathscr{O}^c)\right\}.$$

Notemos que si $x : [t_0,T] \to \mathbb{R}^n]$ es una solución del problema de Cauchy, entonces

$$\|x(t) - x_0\|_{\mathbb{R}^n} \leq \int_{t_0}^{T} \alpha(s)ds \leq \frac{1}{2}\,\mathrm{dist}\,((t_0,x_0), \mathscr{O}^c)\,, \qquad \forall t \in [t_0,T].$$

En particular, $(t,x(t)) \in \mathscr{O}$ para todo $t \in [t_0,T]$.

Consideremos ahora el conjunto

$$\mathbf{E} := \{x \in C\,([t_0,T];\mathbb{R}^n) \mid x \in AC\,([t_0,T];\mathbb{R}^n)\,,\ x(t_0) = x_0,\ \|\dot{x}(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \alpha(t),\ \text{c.t.p. } t \in [t_0,T]\}.$$

Notemos que $\mathbf{E}$ es un conjunto convexo y no vacío. Además, por el Lema 4.2, este conjunto es también compacto en $C\,([t_0,T];\mathbb{R}^n)$ respecto a la norma de la convergencia uniforme.

Consideremos ahora la multifunción $\Phi : \mathbf{E} \to C\,([t_0,T];\mathbb{R}^n)$ dada por la fórmula

$$\Phi(x) = \{y \in C\,([t_0,T];\mathbb{R}^n) \mid y \in AC\,([t_0,T];\mathbb{R}^n)\,,\ y(t_0) = x_0,\ \dot{y}(t) \in F(t,x(t)),\ \text{c.t.p. } t \in [t_0,T]\}\,.$$

Observemos que para concluir la demostración bastaría probar que Φ admite un punto fijo. Veamos que las hipótesis del Teorema de punto fijo de Kakutani se verifican.

Primero notemos que cada $\Phi(x)$ es un subconjunto compacto de $C([t_0,T];\mathbb{R}^n)$ respecto a la norma de la convergencia uniforme. Esto se debe a que $\Phi(x) \subseteq \mathbf{E}$ y $\Phi(x)$ es cerrado, esto último siendo consecuen cia del Lema 4.2 y del Teorema 4.1.2. Por otro lado, cada $\Phi(x)$ es un subconjunto convexo pues $F(t,x(t))$ es un conjunto convexo. Más aún, por proposición 4.2.3, cada $\Phi(x)$ es un subconjunto no vacío. En efecto, este resultado nos dice que existe una selección medible $v : [t_0,T] \to \mathbb{R}^n$ de $t \mapsto F(t,x(t))$. En particular, tenemos que $\|v(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \alpha(t)$, c.t.p. $t \in [t_0,T]$, y por lo tanto $v \in L^1([t_0,T];\mathbb{R}^n)$, lo que implica que $y_v \in \Phi(x)$, donde

$$y_v(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(s)ds, \qquad \forall t \in [t_0,T].$$

Resta ahora ver que Φ es s.c.s., pero como $\Phi(x) \in \mathbf{E}$ para todo $x \in \mathbf{E}$ y $\mathbf{E}$ es un conjunto compacto, por la Proposición 2.2.2 basta ver que Φ tiene grafo cerrado. Ahora bien, esto último es consecuencia directa del Teorema 4.1.2. Por lo tanto, gracias al Teorema de punto fijo de Kakutani tenemos que el problema de Cauchy admite solución. $\square$

5. Existencia via Completitud

Ahora nos enfocaremos en demostrar un resultado de existencia de trayectorias de inclusiones diferenciales, conocido como elTeorema de Filippov, que a diferencia de los que hemos visto hasta ahora, no requieren que las dinámicas tengan imágenes convexas. En la demostración del Teorema de Filippov necesitaremos algunos resultados intermedios y algunas definiciones nuevas.

5.1 Dinámicas mediblemente Lipschitz continuas

Definición 5.1.1 Diremos que una multifunción $F\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ es mediblemente Lipschitz continua en $\mathscr{O}\subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ si existe una función $\ell:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ integrable ($\mathscr{L}$-medible) y positiva tal que

$$\forall t\in\mathbb{R}, \forall x,y\in\mathbb{R}^n \text{ tales que } (t,x),(t,y)\in\mathscr{O} \qquad F(t,x)\subseteq F(t,y)+\overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^m}(\ell(t)\|x-y\|_{\mathbb{R}^n}).$$

En este caso diremos que F es mediblemente ℓ-Lipschitz continua en $\mathscr{O}$.

Notemos que si F es mediblemente Lipschitz continua en $\mathscr{O}$ si y sólo si existe una función $\ell:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ integrable ($\mathscr{L}$-medible) tal que

$$\forall t\in\mathbb{R}, \forall x,y\in\mathbb{R}^n \text{ tales que } (t,x),(t,y)\in\mathscr{O} \qquad d_H(F(t,x),F(t,y))\leq \ell(t)\|x-y\|_{\mathbb{R}^n}.$$

En adelante usaremos la siguiente definiciones:

- Dada una multifunción $F:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\rightrightarrows\mathbb{R}^m$, la función $\rho_F:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ corresponderá a
$$\rho_F(t,x,v) := \operatorname{dist}(v,F(t,x)), \qquad \forall (t,x,v)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m. \tag{5.1}$$
- Una vecindad tubular en torno a una función $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ de diámetro $\varepsilon>0$ será un conjunto de la forma
$$T(x,\varepsilon) := \{(t,y)\in[a,b]\times\mathbb{R}^n \mid \|y-x(t)\|_{\mathbb{R}^n}<\varepsilon\}.$$

El primero resultado preliminar que veremos nos permite establecer las condiciones bajo las cuales la composición de una multifunción medible con una trayectoria medible, sigue siendo medible.

Proposición 5.1.1 Consideremos que una multifunción $F\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ dada. Si F es $\mathscr{L}\times\mathscr{B}$-medible, entonces para toda función $x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ que sea $\mathscr{L}$-medible tenemos que la multifunción $\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$ definida más abajo es $\mathscr{L}$-medible:

$$\psi(t) := F(t,x(t)), \qquad \forall t\in\mathbb{R}.$$

Demostración. Para cada $C\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, definamos $I(C) := \{t\in\mathbb{R} \mid (t,x(t)\in C)\}$ y consideremos también

$$\mathscr{T} := \{C\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \mid I(C) \text{ es } \mathscr{L}\text{-medible}\}.$$

Dado que x es $\mathscr{L}$-medible, tenemos que dado un conjuntos $\mathscr{L}$-medible $A\in\mathscr{L}$ y un Boreliano $B\in\mathscr{B}^n$, tenemos $I(A\times B)$ es $\mathscr{L}$-medible pues

$$I(A\times B) = \{t\in\mathbb{R} \mid t\in A,\ x(t)\in B\} = A\cap x^{-1}(B).$$

En particular, $\mathscr{T}$ contiene a todos los conjuntos de la forma $A\times B$ con $A\subseteq\mathbb{R}$ siendo $\mathscr{L}$-medible y $B\subseteq\mathbb{R}^n$ un Boreliano. Notemos también que $\mathscr{T}$ es una σ-álgebra pues $I(\mathbb{R})$ es $\mathscr{L}$-medible, $\mathscr{T}$ es cerrada respecto a uniones numerables ya que

$$I\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k\right) = \left\{t\in\mathbb{R} \mid (t,x(t))\in\bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k\right\} = \{t\in\mathbb{R} \mid \exists k\in\mathbb{N},\ (t,x(t))\in C_k\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{t\in\mathbb{R} \mid (t,x(t))\in C_k\}$$

y también es cerrada respecto a la diferencia de conjuntos pues

$$I(C\setminus D) = I(C)\setminus I(D).$$

Luego, tenemos que $\mathscr{T}$ contiene a todos los conjuntos $\mathscr{L}\times\mathscr{B}$ medibles pues $\mathscr{T}$ es una σ-álgebra que contiene a $\mathscr{L}\times\mathscr{B}^n$.

Finalmente, tomemos $\mathscr{O}\subseteq\mathbb{R}^m$. Dado que F es $\mathscr{L}\times\mathscr{B}$-medible, tenemos que $F^{-1}(\mathscr{O})$ es un conjunto $\mathscr{L}\times\mathscr{B}$-medible. Luego, $F^{-1}(\mathscr{O})\in\mathscr{T}$ y por lo tanto

$$\Psi^{-1}(\mathscr{O}) = \left\{t\in\mathbb{R} \mid (t,x(t))\in F^{-1}(\mathscr{O})\right\}$$

es $\mathscr{L}$-medible, lo que completa la demostración. □

Notemos que tomando $x(t)\equiv c$ obtenemos la siguiente consecuencia de la Proposición 5.1.1.

Corolario 5.1.2 Consideremos que una multifunción $F\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ dada. Si F es $\mathscr{L}\times\mathscr{B}$-medible, entonces la multifunción $t\mapsto F(t,x)$ es $\mathscr{L}$-medible para todo $x\in\mathbb{R}^n$ fijo.

Observemos además que la Proposición 5.1.1 se puede reducir también al caso *uni-valuado*.

Corolario 5.1.3 Supongamos que $I\subseteq\mathbb{R}$ es $\mathscr{L}$-medible. Si $f: I\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ es $\mathscr{L}\times\mathscr{B}$- medible, entonces para toda función $x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ que sea $\mathscr{L}$-medible tenemos que la función $t\mapsto f(t,x(t))$ es $\mathscr{L}$-medible.

Demostración. Basta considerar en la Proposición 5.1.1 la multifunción

$$F(t,x) = \begin{cases} \{f(t,x)\} & \text{si } t \in I, \\ \emptyset & \text{si no.} \end{cases}$$

□

El segundo resultado intermedio que necesitamos estudiar tiene relación con la regularidad de la función $\rho_F(t,x,v)$ dada por (5.1). Veremos que ésta es una *función de Carathéodory* en el sentido que siguiente.

Definición 5.1.2 Supongamos que $I \subseteq \mathbb{R}$ es $\mathscr{L}$-medible. Diremos que una función Si $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una función de Carathéodory si
- para todo $t \in I$ fijo, la función $x \mapsto f(t,x)$ es continua;
- para todo $x \in \mathbb{R}^n$ fijo, la función $t \mapsto f(t,x)$ es $\mathscr{L}$-medible.

Lema 5.1 Si $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una función de Carathéodory, con $I \subseteq \mathbb{R}$ siendo $\mathscr{L}$-medible, entonces f es $\mathscr{L} \times \mathscr{B}$-medible.

Demostración. Sea $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ un denso numerable de $\mathbb{R}^n$. Dado $k \in \mathbb{N}$ fijo definamos

$$p_k(x) := \text{ínf}\left\{ i \in \mathbb{N} \mid x \in \overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n}\left(x_i, \frac{1}{k+1}\right)\right\}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Consideremos la función $f_k : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definida por

$$f_k(t,x) = f\left(t, x_{p_k(x)}\right), \qquad \forall (t,x) \in I \times \mathbb{R}^n.$$

Fijando $x \in \mathbb{R}^n$, notemos que $x_{p_k(x)} \to x$ cuando $k \to +\infty$. Luego, dado que $x \mapsto f(t,x)$ es continua para todo $t \in I$ fijo, tenemos que $f_k(t,x) \to f(t,x)$ puntualmente en $I \times \mathbb{R}^n$. En consecuencia, si probamos que cada f_k es $\mathscr{L} \times \mathscr{B}$-medible, podemos concluir que f es $\mathscr{L} \times \mathscr{B}$-medible.

Sea $\mathscr{O} \subseteq \mathbb{R}^m$ un conjunto abierto, sigue que

$$f_k^{-1}(\mathscr{O}) = \left\{(t,x) \in I \times \mathbb{R}^n \mid f\left(t, x_{p_k(x)}\right) \in \mathscr{O}\right\} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \left\{(t,x) \in I \times \mathbb{R}^n \mid f(t,x_i) \in \mathscr{O},\ i = p_k(x)\right\}.$$

Ahora bien, la condición $i = p_k(x)$ se puede reescribir como

$$x \in \overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n}\left(x_i, \frac{1}{k+1}\right) \setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} \overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n}\left(x_j, \frac{1}{k+1}\right).$$

Por lo tanto

$$f_k^{-1}(\mathscr{O}) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f(\cdot, x_i)^{-1}(\mathscr{O}) \times \left(\overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n}\left(x_i, \frac{1}{k+1}\right) \setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} \overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n}\left(x_j, \frac{1}{k+1}\right)\right).$$

Dado que f es una función de Carathéodory, tenemos que $f(\cdot,x_i)^{-1}(\mathscr{O})$ es $\mathscr{L}$-medible. Esto implica que $f_k^{-1}(\mathscr{O})$ se puede expresar como una unión numerables de conjuntos $\mathscr{L} \times \mathscr{B}$-medible, y en consecuencia Por lo tanto f_k es $\mathscr{L} \times \mathscr{B}$-medible y la conclusión sigue. □

Proposición 5.1.4 Consideremos que una multifunción $F\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ dada. Si F es mediblemente ℓ-Lipschitz continua en $\mathscr{O}\subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, entonces:

1. $(t,(x,v))\mapsto \rho_F(t,x,v)$ es una función de Carathéodory en $\mathscr{O}\times\mathbb{R}^n$ que satisface

$$\forall t\in\mathbb{R}, \forall x,y\in\mathbb{R}^n \text{ tales que } (t,x),(t,y)\in\mathscr{O} \quad |\rho_F(t,x,v)-\rho_F(t,y,w)|\leq \ell(t)\|x-y\|_{\mathbb{R}^n}+\|v-w\|_{\mathbb{R}^n};$$

2. dadas dos funciones $x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ y $v:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ que sean $\mathscr{L}$-medibles, con $\mathrm{gr}(x)\subseteq\mathscr{O}$, la función $t\mapsto \rho_F(t,x(t),v(t))$ es $\mathscr{L}$-medible.

Demostración.

1. Fijemos $(x,v)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ y tomemos $\alpha\in\mathbb{R}$. Notemos que

$$\{t\in\mathbb{R}\mid \rho_F(t,x,v)<\alpha\}=\{t\in\mathbb{R}\mid \exists w\in F(t,x),\ \|w-v\|_{\mathbb{R}^n}<\alpha\}=\{t\in\mathbb{R}\mid F(t,x)\cap\mathbb{B}_{\mathbb{R}^n}(v,\alpha)\}.$$

Dado que $t\mapsto F(t,x)$ es $\mathscr{L}$-medible gracias al Corolario 5.1.2, tenemos que $\{t\in\mathbb{R}\mid \rho_F(t,x,v)<\alpha\}$ es $\mathscr{L}$-medible cualquiera sea $\alpha\in\mathbb{R}$. Esto implica que $t\mapsto\rho_F(t,x,v)$ es $\mathscr{L}$-medible.
Ahora bien, fijemos $x_0,v_0\in\mathbb{R}^n$ y $t\in\mathbb{R}$ tales que $(t,x)\in\mathscr{O}$. Dado $\varepsilon>0$, existe $v_\varepsilon\in F(t,x_0)$ tal que

$$\|v_0-v_\varepsilon\|_{\mathbb{R}^n}\leq\rho_F(t,x_0,v_0)+\varepsilon$$

Dado que F es mediblemente ℓ-Lipschitz continua, tenemos que

$$v_\varepsilon\in F(t,x_0)\subseteq F(t,x)+\overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n}(\ell(t)\|x-x_0\|_{\mathbb{R}^n}),\qquad \forall x\in\mathbb{R}^n.$$

Luego para cualquier $x,v\in\mathbb{R}^n$ tenemos

$$\begin{aligned}\|v_0-v_\varepsilon\|_{\mathbb{R}^n} &\geq \inf_{w\in F(t,x),\ e\in\overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n}}\|v_0-w-\ell(t)\|x-y\|_{\mathbb{R}^n}e\|_{\mathbb{R}^n}\\ &\geq \inf_{w\in F(t,x)}\|v_0-w\|_{\mathbb{R}^n}-\ell(t)\|x-x_0\|_{\mathbb{R}^n}\\ &\geq \inf_{w\in F(t,x)}\|v-w\|_{\mathbb{R}^n}-\|v-v_0\|_{\mathbb{R}^n}-\ell(t)\|x-x_0\|_{\mathbb{R}^n}\\ &=\rho_F(t,x,v)-\|v-v_0\|_{\mathbb{R}^n}-\ell(t)\|x-x_0\|_{\mathbb{R}^n}.\end{aligned}$$

En consecuencia, dado que $\varepsilon>0$ es arbitrario, obtenemos

$$\rho_F(t,x,v)\leq\rho_F(t,x_0,v_0)+\|v-v_0\|_{\mathbb{R}^n}+\ell(t)\|x-x_0\|_{\mathbb{R}^n},\qquad \forall x,x_0,v,v_0\in\mathbb{R}^n,\ \text{tal que } (t,x_0)\in\mathscr{O}.$$

Luego, intercambiando los roles entre (x_0,v_0) y (x,v), concluimos que ρ_F es una función de Carathéodory pues

$$|\rho_F(t,x,v)-\rho_F(t,x_0,v_0)|\leq\|v-v_0\|_{\mathbb{R}^n}+\ell(t)\|x-x_0\|_{\mathbb{R}^n},\qquad \forall x,x_0,v,v_0\in\mathbb{R}^n.$$

2. Dado que ρ_F es una función de Carathéodory, gracias al Lema 5.1, también es una función $\mathscr{L}\times\mathscr{B}$-medible. Además, como $t\mapsto(x(t),v(t))$ es una función $\mathscr{L}$-medible, gracias al Corolario 5.1.3 concluimos el resultado buscado.

□

El último resultado intermedio que veremos cumplirá un rol fundamental en la construcción de una sucesión de curvas que usaremos para probar la existencia de una trayectorias solución de la inclusión diferencial.

Proposición 5.1.5 Supongamos que $\mathscr{O} \subseteq [a,b] \times \mathbb{R}^n$ es un conjunto no vacío relativamente abierto y $F: \mathscr{O} \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ es una multifunción $\mathscr{L} \times \mathscr{B}$ - medible. Si F es mediblemente ℓ-Lipschitz continua en $\mathscr{O}$ y sus imágenes son conjuntos cerrados y no vacíos, entonces para cada $x \in AC([a,b];\mathbb{R}^n)$ tal que $\mathrm{gr}(x) \subseteq \mathscr{O}$ existe $w_x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ que es $\mathscr{L}$ - medible y que verifica

$$w_x(t) \in F(t,x(t)) \quad \text{y} \quad \|w_x(t) - \dot{x}(t)\|_{\mathbb{R}^n} = \rho_F(t,x(t),\dot{x}(t)), \qquad \text{c.t.p. } t \in [a,b]$$

Además, si $t \mapsto \rho_F(t,x(t),\dot{x}(t))$ es integrable, también lo será $t \mapsto w_x(t)$.

Demostración. Consideremos la función

$$g(t,v) := \|v - \dot{x}(t)\|_{\mathbb{R}^n} - \rho_F(t,x(t),\dot{x}(t)), \quad \forall v \in \mathbb{R}^n, \text{ c.t.p. } t \in [a,b]$$

y multifunción

$$G(t) := \{v \in \mathbb{R}^n \mid g(t,v) = 0\}, \qquad \text{c.t.p. } t \in [a,b].$$

Veamos que G es $\mathscr{L}$-medible, para esto tomemos $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $t \in [a,b]$. Luego tenemos

$$G(t) \cap A \neq \emptyset \iff \exists v \in A \text{ tal que } g(t,v) = 0 \iff \exists v \in A \text{ tal que } (t,v) \in g^{-1}(\{0\}) \cap [a,b] \times A.$$

Por otro lado, tenemos que g es una función de Carathéodory gracias a la Proposición 5.1.4. Luego, por el Lema 5.1, tenemos que g es una función $\mathscr{L} \times \mathscr{B}$-medible y por lo tanto $g^{-1}(\{0\}) \cap [a,b] \times A$ es un conjunto $\mathscr{L} \times \mathscr{B}$-medible. Luego, $\{t \in [a,b] \mid G(t) \cap A \neq \emptyset\}$ es un conjunto $\mathscr{L}$-medible gracias al Lema 4.3 (proyección medible).

Consideremos ahora la multifunción $\Gamma(t) := F_x(t) \cap G(t)$, donde $F_x(t) := F(t,x(t))$. Notemos que $\mathrm{gr}(\Gamma) = \mathrm{gr}(F_x) \cap \mathrm{gr}(G)$, luego como G es $\mathscr{L}$-medible y F_x también lo es (gracias a la Proposición 5.1.1), tenemos que $\mathrm{gr}(F_x)$ y $\mathrm{gr}(G)$ son conjuntos $\mathscr{L} \times \mathscr{B}$-medibles (Proposición 4.2.1). En consecuencia, $\mathrm{gr}(\Gamma)$ es un conjunto $\mathscr{L} \times \mathscr{B}$-medible y a posterior, gracias a la Proposición 4.2.1 concluimos que F es $\mathscr{L}$-medible.

Dado que Γ tiene imágenes cerradas y no vacías, la conclusión viene del Teorema 4.2.2 (selección medible) y el hecho que $\dot{x}$ es integrable. □

Finalmente, necesitamos ver un resultado técnico preliminar antes de abordar el Teorema de Filippov, Este lema es una fórmula que nos permitirá calcular integrales iteradas más adelante.

Lema 5.2 Si $\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función integrable ($\mathscr{L}$-medible) entonces cualquiera sean $a,t \in \mathbb{R}$ y $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tenemos que

$$\int_a^t \ell(t_1) \left(\int_a^{t_1} \ell(t_2) \left(\dots \left(\int_a^{t_{m-2}} \ell(t_{m-1}) \left(\int_a^{t_{m-1}} \ell(t_m) dt_m \right) dt_{m-1} \right) \dots \right) dt_2 \right) dt_1 = \frac{1}{m!} \left(\int_a^t \ell(s) ds \right)^m$$

Demostración. Primero notemos que el caso $m = 1$ es directo. Además el caso $m = 2$ viene de notar que para todo $k \in \mathbb{N}$, usando integración por partes tenemos que

$$\int_a^t \ell(s) \left(\int_a^s \ell(r) dr \right)^k ds = \frac{1}{k+1} \left(\int_a^t \ell(s) ds \right)^{k+1}. \tag{5.2}$$

Supongamos ahora que la fórmula es válida para algún $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Luego para $m+1$ integrales iteradas tenemos

$$\int_a^t \ell(t_1) \left(\int_a^{t_1} \ell(t_2) \left(\dots \left(\int_a^{t_{m-1}} \ell(t_m) \left(\int_a^{t_m} \ell(t_{m+1}) dt_{m+1} \right) dt_m \right) \dots \right) dt_2 \right) dt_1$$
$$= \int_a^t \ell(t_1) \left(\frac{1}{m!} \left(\int_a^{t_1} \ell(s) ds \right)^m \right) dt_1$$
$$= \frac{1}{(m+1)!} \left(\int_a^t \ell(s) ds \right)^m$$

donde la última igualdad viene de usar (5.2) con $k = m$. Por lo tanto, usando el principio de inducción se obtiene el resultado buscado. □

Ahora tenemos todas la herramientas necesarias para probar el Teorema de Filippov.

Teorema 5.1.6 — Filippov. Supongamos que $\mathscr{O} \subseteq [a,b] \times \mathbb{R}^n$ es un conjunto no vacío relativamente abierto y $F : \mathscr{O} \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ es una multifunción $\mathscr{L} \times \mathscr{B}$ - medible. Si F es mediblemente ℓ-Lipschitz continua en $\mathscr{O}$ y sus imágenes son conjuntos cerrados y no vacíos, entonces para cada $x_0 \in AC([a,b];\mathbb{R}^n)$ y $\varepsilon > 0$ que satisfacen

$$T(x_0, \varepsilon) \subseteq \mathscr{O} \qquad \text{y} \qquad \int_a^b \rho_F(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) dt < \varepsilon \exp\left(-\int_a^b \ell(t) dt \right)$$

existe una trayectoria $x \in AC([a,b];\mathbb{R}^n)$, con $\|x - x_0\|_\infty \leq \varepsilon$, solución del problema de Cauchy

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)), \qquad \text{en c.t.p. } t \in [a,b], \qquad x(a) = x_0(a).$$

Demostración. La demostración consiste en construir una sucesión $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq AC([a,b];\mathbb{R}^n)$ tal que $\dot{x}_k = w_{x_{k-1}}$ c.t.p. en $[a,b]$, donde w_x es la selección medible dada por la Proposición 5.1.5, y probar que esta sucesión es de Cauchy en $AC([a,b];\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R} \times L^1([a,b];\mathbb{R}^n)$.

Notemos que inductivamente podemos definir la sucesión de la siguiente forma:

- Caso base: definamos $v_1 = w_{x_0}$, donde w_{x_0} es la selección medible dada por la Proposición 5.1.5 con $x = x_0$. Notemos que

$$v_1(t) \in F(t, x_0(t)) \quad \text{y} \quad \|v_1(t) - \dot{x}_0(t)\|_{\mathbb{R}^n} = \rho_F(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)), \qquad \text{c.t.p. } t \in [a,b].$$

  Luego definamos

$$x_1(t) = x_0(a) + \int_a^t v_1(s) ds, \qquad \forall t \in [a,b].$$

  En particular tenemos que $\dot{x}_1 = v_1$ y por lo tanto

$$\|\dot{x}_1(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \|\dot{x}_1(t) - \dot{x}_0(t)\|_{\mathbb{R}^n} + \|\dot{x}_0(t)\|_{\mathbb{R}^n} = \rho_F(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) + \|\dot{x}_0(t)\|_{\mathbb{R}^n}.$$

  Luego, $\dot{x}_1 \in L^1([a,b];\mathbb{R}^n)$ y por lo tanto $x_1 \in AC([a,b];\mathbb{R}^n)$. Además, tenemos que

$$\|x_1(t) - x_0(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \int_a^t \|\dot{x}_1(s) - \dot{x}_0(s)\|_{\mathbb{R}^n} = \int_a^t \rho_F(s, x_0(s), \dot{x}_0(s)) ds < \varepsilon.$$

Esto implica que $(t,x_1(t)) \in T(x_0,\varepsilon) \subseteq \mathscr{O}$, y en consecuencia, $\rho_F(t,x_1(t),\dot{x}_1(t))$ está bien definido pues $F(t,x_1(t)) \neq \emptyset$ para todo $t \in [a,b]$ y además cumple, gracias a la Proposición 5.1.4, la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned}\rho_F(t,x_1(t),\dot{x}_1(t)) &\leq \rho_F(t,x_0(t),\dot{x}_0(t)) + \ell(t)\|x_1(t)-x_0(t)\|_{\mathbb{R}^n} + \|\dot{x}_1(t)-\dot{x}_0(t)\|_{\mathbb{R}^n}\\ &\leq 2\rho_F(t,x_0(t),\dot{x}_0(t)) + \varepsilon\ell(t).\end{aligned}$$

Con esto vemos que $t \mapsto \rho_F(t,x_1(t),\dot{x}_1(t))$ es integrable.
De forma similar, podemos definir

$$x_2(t) = x_0(a) + \int_a^t v_2(s)ds, \qquad \forall t \in [a,b],$$

donde $v_2 = w_{x_1}$, donde w_{x_1} es la selección medible dada por la Proposición 5.1.5 con $x = x_1$. Repitiendo los argumentos anteriores vemos que $x_2 \in C([a,b];\mathbb{R}^n)$. Notemos también que, gracias a la Proposición 5.1.4, tenemos

$$\|\dot{x}_2(t)-\dot{x}_1(t)\|_{\mathbb{R}^n} = \rho_F(t,x_1(t),\dot{x}_1(t)) \leq \rho_F(t,x_0(t),\dot{x}_1(t)) + \ell(t)\|x_1(t)-x_0(t)\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Usando el hecho que $\rho_F(t,x_0(t),\dot{x}_1(t)) = 0$ pues $\dot{x}_1(t) \in F(t,x_0(t))$, tenemos que

$$\|x_2(t)-x_1(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \int_a^t \|\dot{x}_2(s)-\dot{x}_1(s)\|_{\mathbb{R}^n} = \int_a^t \ell(s)\|x_1(s)-x_0(s)\|_{\mathbb{R}^n}ds.$$

Ahora bien, como

$$\|x_1(s)-x_0(s)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \int_a^b \rho_F(s,x_0(s),\dot{x}_0(s))ds$$

obtenemos

$$\|x_2(t)-x_1(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \int_a^b \rho_F(s,x_0(s),\dot{x}_0(s))ds \cdot \int_a^b \ell(s)ds.$$

Esto nos dice que

$$\begin{aligned}\|x_2(t)-x_0(t)\|_{\mathbb{R}^n} &\leq \|x_2(t)-x_1(t)\|_{\mathbb{R}^n} + \|x_1(t)-x_0(t)\|_{\mathbb{R}^n}\\ &\leq \int_a^b \rho_F(s,x_0(s),\dot{x}_0(s))ds\left(\int_a^b \ell(s)ds + 1\right)\\ &\leq \int_a^b \rho_F(s,x_0(s),\dot{x}_0(s))ds\exp\left(\int_a^b \ell(s)ds\right) < \varepsilon.\end{aligned}$$

A partir de esto deducimos que $(t,x_2(t)) \in T(x_0,\varepsilon) \subseteq \mathscr{O}$, y en consecuencia, $\rho_F(t,x_2(t),\dot{x}_2(t))$ está bien definido pues $F(t,x_2(t)) \neq \emptyset$ para todo $t \in [a,b]$. Usando argumentos similares a los visto más arriba obtenemos que $t \mapsto \rho_F(t,x_2(t),\dot{x}_2(t))$ es integrable.

- Paso inductivo: Supongamos ahora que, para $m \geq 2$, hemos construido $x_1,\ldots,x_m \in AC([a,b];\mathbb{R}^n)$ tales que para cada $k = 0,\ldots m-1$ tenemos

$$\dot{x}_{k+1}(t) \in F(t,x_k(t)) \quad \text{and} \quad \|\dot{x}_{k+1}(t)-\dot{x}_k(t)\|_{\mathbb{R}^n} = \rho_F(t,x_k(t),\dot{x}_k(t)), \qquad \text{c.t.p. } t \in [a,b].$$

Supongamos además que estas curvas satisfacen
(i) dado $k = 0,\ldots,m-2$

$$\|\dot{x}_{k+2}(t)-\dot{x}_{k+1}(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \ell(t)\|x_{k+1}(t)-x_k(t)\|_{\mathbb{R}^n}, \quad \text{c.t.p. } t \in [a,b],$$

(ii) dado $k = 0, \dots, m-1$

$$\|x_{k+1}(t) - x_k(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \int_a^t \rho_F(s, x_0(s), \dot{x}_0(s))ds \cdot \frac{1}{k!}\left(\int_a^t \ell(s)ds\right)^k, \ \forall t \in [a,b],$$

(iii) $t \mapsto \rho_F(t, x_k(t), \dot{x}_k(t))$ es integrable para cada $k = 0, \dots, m$.
Usando los argumentos mismos expuestos en la parte precedente, no es difícil ver que podemos construir $x_{m+1} \in AC([a,b];\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\dot{x}_{m+1}(t) \in F(t, x_m(t)) \quad \text{y} \quad \|\dot{x}_{m+1}(t) - \dot{x}_m(t)\|_{\mathbb{R}^n} = \rho_F(t, x_m(t), \dot{x}_k m(t)), \qquad \text{c.t.p. } t \in [a,b].$$

Veamos ahora que los punto (i), (ii) y (iii) son también válidos para el caso $k = m+1$. Comencemos por probar (i), es decir,

$$\|\dot{x}_{m+1}(t) - \dot{x}_m(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \ell(t)\|x_m(t) - x_{m-1}(t)\|_{\mathbb{R}^n}, \qquad \text{c.t.p. } t \in [a,b]. \tag{5.3}$$

Para esto notemos que para c.t.p. $t \in [a,b]$ tenemos

$$\|\dot{x}_{m+1}(t) - \dot{x}_m(t)\|_{\mathbb{R}^n} = \rho_F(t, x_m(t), \dot{x}_m(t)) \leq \rho_F(t, x_{m-1}(t), \dot{x}_m(t)) + \ell(t)\|x_m(t) - x_{m-1}(t)\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Luego, como $\rho_F(t, x_{m-1}(t), \dot{x}_m(t)) = 0$ obtenemmos (5.3).
Veamos ahora que el punto (ii):

$$\|x_{m+1}(t) - x_m(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \int_a^t \rho_F(s, x_0(s), \dot{x}_0(s))ds \cdot \frac{1}{m!}\left(\int_a^t \ell(s)ds\right)^m, \quad \forall t \in [a,b]. \tag{5.4}$$

Por una parte, usando la hipótesis de inducción tenemos

$$\|x_{m+1}(t) - x_m(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \int_a^t \|\dot{x}_{m+1}(s) - \dot{x}_m(s)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \int_a^t \ell(s_1)\|x_m(s_1) - x_{m-1}(s_1)\|_{\mathbb{R}^n} ds_1.$$

Notemos que para cada $s_1 \in [a,b]$ también tenemos

$$\|x_m(s_1) - x_{m-1}(s_1)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \int_a^{s_1} \ell(s_2)\|x_{m-1}(s_2) - x_{m-2}(s_2)\|_{\mathbb{R}^n} ds_2.$$

Luego, iterando este proceso obtenemos

$$\|x_{m+1}(t) - x_m(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \int_a^t \ell(s_1)\int_a^{s_1} \ell(s_2)\dots\int_a^{s_{m-1}} \ell(s_m)\|x_1(s_m) - x_0(s_m)\|_{\mathbb{R}^n} ds_m \dots ds_2 ds_1$$

Ahora bien, dado que cada $s_m \in [a,b]$

$$\|x_1(s_m) - x_0(s_m)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \int_a^b \rho_F(s, x_0(s), \dot{x}_0(s))ds,$$

tenemos

$$\|x_{m+1}(t) - x_m(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \int_a^t \rho_F(s, x_0(s), \dot{x}_0(s))ds \cdot \int_a^t \ell(s_1)\int_a^{s_1} \ell(s_2)\dots\int_a^{s_{m-1}} \ell(s_m)ds_m \dots ds_2 ds_1.$$

Por lo tanto, gracias al Lema 5.2 obtenemos (5.4).

Finalemente veamos que $t \mapsto \rho_F(t, x_{m+1}(t), \dot{x}_{m+1}(t))$ es integrable. Para esto primero necesitamos ver que $(t, x_{m+1}(t)) \in T(x_0, \varepsilon) \subseteq \mathscr{O}$. Esto es efectivamente el caso pues gracias a la hipótesis de inducción, para todo $t \in [a,b]$ tenemos

$$\begin{aligned}
\|x_{m+1}(t) - x_0(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq & \sum_{k=0}^{m} \|x_{k+1}(t) - x_k(t)\|_{\mathbb{R}^n} \\
& \int_a^t \rho_F(s, x_0(s), \dot{x}_0(s))ds \cdot \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \left(\int_a^t \ell(s)ds \right)^k \\
& \leq \int_a^b \rho_F(s, x_0(s), \dot{x}_0(s))ds \exp\left(\int_a^b \ell(s)ds \right) < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Sigue que, gracias a la Proposición 5.1.4, la siguiente desigualdad es válida

$$\begin{aligned}
\rho_F(t, x_{m+1}(t), \dot{x}_{m+1}(t)) &\leq \rho_F(t, x_m(t), \dot{x}_m(t)) + \ell(t)\|x_{m+1}(t) - x_m(t)\|_{\mathbb{R}^n} + \|\dot{x}_{m+1}(t) - \dot{x}_m(t)\|_{\mathbb{R}^n} \\
&\leq 2\rho_F(t, x_m(t), \dot{x}_m(t)) + \varepsilon\ell(t).
\end{aligned}$$

A partir de esto concluimos que el punto (iii) es válido igualmente para $k = m+1$.

Veamos ahora la conclusión del Teorema. Dado $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tenemos

$$\begin{aligned}
\|\dot{x}_{i+1} - \dot{x}_i\|_{L^1} &= \int_a^b \|\dot{x}_{i+1}(t) - \dot{x}_i(t)\|_{\mathbb{R}^n} dt \leq \int_a^b \ell(t)\|x_{i+1}(t) - x_i(t)\|_{\mathbb{R}^n} dt \\
&\leq \int_a^b \ell(t) \left(\int_a^t \rho_F(s, x_0(s), \dot{x}_0(s))ds \right) \frac{1}{(i-1)!} \left(\int_a^t \ell(s)ds \right)^{(i-1)} dt \\
&\leq \int_a^t \rho_F(s, x_0(s), \dot{x}_0(s))ds \cdot \frac{1}{(i-1)!} \int_a^b \ell(t) \left(\int_a^t \ell(s)ds \right)^{(i-1)} dt.
\end{aligned}$$

Usando integración por partes (ver la demostración del Lema 5.2) tenemos

$$\frac{1}{(i-1)!} \int_a^b \ell(t) \left(\int_a^t \ell(s)ds \right)^{(i-1)} dt = \frac{1}{i!} \left(\int_a^b \ell(s)ds \right)^i dt$$

Notemos ahora que $\{\dot{x}_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq L^1([a,b];\mathbb{R}^n)$ es una sucesión de Cauchy pues para todo $k,m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tenemos

$$\|\dot{x}_{k+m} - \dot{x}_k\|_{L^1} \leq \sum_{i=k}^{k+m-1} \|\dot{x}_{i+1} - \dot{x}_i\|_{L^1} \leq \int_a^b \rho_F(s, x_0(s), \dot{x}_0(s))ds \cdot \sum_{i=k}^{k+m-1} \frac{1}{i!} \left(\int_a^b \ell(s)ds \right)^i$$

En particular, esto implica que $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq C([a,b];\mathbb{R}^n)$ es también una sucesión de Cauchy pues

$$\|x_{k+m} - x_k\|_\infty \leq \|\dot{x}_{k+m} - \dot{x}_k\|_{L^1}, \qquad \forall k,m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

y por lo tanto existen $x \in C([a,b];\mathbb{R}^n)$ y $v \in L^1([a,b];\mathbb{R}^n)$ tales que $x_k \to x$ uniformemente y $\dot{x}_k \to v$ en $L^1([a,b];\mathbb{R}^n)$. Esto implica que $x \in AC([a,b];\mathbb{R}^n)$ y $\dot{x} = v$ c.t.p.

Finalmente, pasando a una subsucesión si fuese necesario, tenemos que $\dot{x}_k(t) \to \dot{x}(t)$ c.t.p. $t \in [a,b]$. En consecuencia tenemos $\rho_F(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0$ c.t.p. $t \in [a,b]$. Dado que $F(t, x(t))$ es un conjunto cerrado concluimos que $\dot{x}(t) \in F(t, x(t)) = 0$ c.t.p. $t \in [a,b]$, es decir, x es solución de la inclusión diferencial. $\square$

6. Propiedades cualitativas

En esta parte nos enfocaremos en estudiar propiedades cualitativas del trayectorias soluciones de una inclusión diferencial.

6.1 Lema de Gronwall

Proposición 6.1.1 — Lema de Gronwall. Supongamos que $x \in AC([a,b];\mathbb{R}^n)$, $\gamma \geq 0$ y $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función integrable ($\mathscr{L}$-medible) y positiva. Si

$$\|\dot{x}(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \gamma \|x(t)\|_{\mathbb{R}^n} + \alpha(t), \qquad \text{c.t.p. } t \in [a,b],$$

entonces

$$\|x(t) - x(a)\|_{\mathbb{R}^n} \leq (e^{\gamma(t-a)} - 1)\|x(a)\|_{\mathbb{R}^n} + \int_a^t e^{\gamma(t-s)}\alpha(s)ds, \quad \forall t \in [a,b].$$

Demostración. Comencemos por observar que la función $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(t) := \|x(t) - x(a)\|_{\mathbb{R}^n}, \qquad \forall t \in [a,b],$$

es absolutamente continua pues $x \in AC([a,b];\mathbb{R}^n)$. En efecto, basta notar que para cualquier colección finita de intervalos disjuntos $\{(a_1,b_1),\ldots,(a_m,b_m)\}$ contenidos en $[a,b]$ tenemos que

$$\sum_{i=1}^m |\varphi(b_i) - \varphi(a_i)| \leq \sum_{i=1}^m \left| \|x(b_i) - x(a)\|_{\mathbb{R}^n} - \|x(a_i) - x(a)\|_{\mathbb{R}^n} \right| \leq \sum_{i=1}^m \|x(b_i) - x(a_i)\|_{\mathbb{R}^n}.$$

En particular, tenemos que φ es derivable c.t.p. en $[a,b]$. Sea $I \subseteq [a,b]$ un conjunto $\mathscr{L}$-medible tal que $\mu_1(I) = b - a$ y $\dot{\varphi}(t)$ existe para todo $t \in I$.

Por una parte tenemos que si $\varphi(t) > 0$ para algún $t \in I$, entonces

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{(x(t) - x(a))^\top \dot{x}(t)}{\varphi(t)}$$

y si por otra parte $\varphi(t) = 0$ con $t \in I$, entonces $\dot{\varphi}(t) = 0$ pues $\varphi(a) \geq 0$ para todo $s \in [a,b]$ y por lo tanto φ alcanza un mínimo en este caso.

Luego, sigue que

$$\dot{\varphi}(t) \leq |\dot{\varphi}(t)| \leq \|\dot{x}(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \gamma\|x(t)\|_{\mathbb{R}^n} + \alpha(t) \leq \gamma\varphi(t) + \gamma\|x(a)\|_{\mathbb{R}^n} + \alpha(t), \qquad \text{c.t.p. } t \in [a,b].$$

Multiplicando por esta desigualdad por $e^{-\gamma t}$ e integrando posteriormente obtenemos

$$\varphi(t)e^{-\gamma t} - \varphi(a)e^{-\gamma a} \leq \|x(a)\|_{\mathbb{R}^n}\left(e^{-\gamma a} - e^{-\gamma t}\right) + \int_a^t e^{-\gamma s}\alpha(s)ds, \qquad \forall t \in [a,b].$$

Notando que $\varphi(a) = 0$ obtenemos el resultado buscado. □

El Lema de Gronwall entrega una desigualdad que juega un rol muy importante en el estudio cualitativo de soluciones de inclusiones diferenciales, como lo muestra el siguiente resultado.

Corolario 6.1.2 Supongamos que $F\colon [a,b]\times\mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ es una multifunción que tiene crecimiento lineal: existe $c > 0$ tal que

$$\sup_{v\in F(t,x)} \|v\|_{\mathbb{R}^n} \leq c(1 + \|x\|_{\mathbb{R}^n}), \quad \forall (t,x) \in [a,b]\times\mathbb{R}^n.$$

Si $x \in AC([a,b];\mathbb{R}^n)$ es una solución del problema de Cauchy

$$\dot{x}(t) \in F(t,x(t)), \qquad \text{en c.t.p. } t \in [a,b],$$

entonces

$$\|x(t) - x(a)\|_{\mathbb{R}^n} \leq (e^{c(t-a)} - 1)(\|x(a)\|_{\mathbb{R}^n} + 1), \quad \forall t \in [a,b]$$

y

$$\|\dot{x}(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq ce^{c(t-a)}(\|x(a)\|_{\mathbb{R}^n} + 1), \quad \text{c.t.p. } t \in [a,b].$$

Demostración. Basta considerar $\gamma = \alpha(t) = c$. □

6.2 Conjuntos solución y de puntos accesibles

Dada una dinámica $F\colon [a,b]\times\mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$, un instante $T \in [a,b]$ y una condición inicial $\xi \in \mathbb{R}^n$, denotaremos por

- $\mathbb{S}^F(\xi)$ al conjunto de todas las trayectorias $x \in AC([a,b];\mathbb{R}^n)$ solución del problema de Cauchy

$$\dot{x}(t) \in F(t,x(t)), \qquad \text{en c.t.p. } t \in [a,b], \qquad x(a) = \xi.$$

- $\mathscr{U}_T^F(\xi)$ al conjunto de puntos accesibles al tiempo T:

$$\mathscr{U}_T^F(\xi) := \left\{x(T) \in \mathbb{R}^n \mid x \in \mathbb{S}^F(\xi)\right\}.$$

Nos interesa conocer qué propiedades de continuidad poseen las multifunciones $\xi \mapsto \mathbb{S}^F(\xi)$ y $\xi \mapsto \mathscr{U}_T^F(\xi)$. Estudiaremos para esto dos casos por separado, el caso s.c.s. y el caso Lipschitz continuo.

6.2.1 Caso dinámica mediblemente s.c.s.

El primer caso que estudiaremos es el de dinámicas que son mediblemente s.c.s. Los argumentos necesarios para demostrar este teorema son similares a los usados para demostrar el Teorema de Castaing para la existence de trayectorias.

Teorema 6.2.1 — Castaing II. Supongamos que $\mathscr{O} \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto y $F\colon [a,b] \times \mathscr{O} \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ es una multifunción dada. Si F es mediblemente s.c.s., sus imágenes son conjuntos convexos, compactos no vacíos, y existe una función $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable ($\mathscr{L}$-medible) y positiva tal que

$$\|v\|_{\mathbb{R}^n} \leq \alpha(t), \qquad \forall (t,x) \in [a,b] \times \mathscr{O},\ v \in F(t,x).$$

Si $K \subseteq \mathscr{O}$ es un conjunto compacto convexo no vacío que verifica

$$\int_a^b \alpha(t)dt < \operatorname{dist}(\xi, \mathscr{O}^c), \qquad \forall \xi \in K,$$

entonces la multifunción $\mathbb{S}^F : K \rightrightarrows C([a,b];\mathbb{R}^n)$ es s.c.s. y tiene imágenes compactas y no vacías. Además, para todo $T \in [a,b]$, la multifunción $\mathscr{U}_T^F : K \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ también es s.c.s. y tiene imágenes compactas y no vacías.

Demostración. Consideremos ahora el conjunto

$$\mathbf{E}_K := \{x \in C([a,b];\mathbb{R}^n) \mid x \in AC([a,b];\mathbb{R}^n),\ x(a) \in K,\ \|\dot{x}(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \alpha(t),\ \text{c.t.p. } t \in [a,b]\}.$$

Notemos que si $x \in \mathbf{E}_K$, entonces

$$\|x(t) - x(a)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \int_a^t \|\dot{x}(s)\|_{\mathbb{R}^n} ds \leq \int_a^t \alpha(s)ds < \operatorname{dist}(x(a), \mathscr{O}^c), \qquad \forall t \in [a,b].$$

En particular, $x(t) \in \mathscr{O}$ para todo $t \in [a,b]$. Además, es claro que $\mathbf{E}_K$ es un conjunto convexo y no vacío, pues K lo es. También, gracias al Lema 4.2, este conjunto es compacto en $C([a,b];\mathbb{R}^n)$ respecto a la norma de la convergencia uniforme.

Para $\xi \in K$ fijo, definamos $\mathbf{E}_K^\xi = \{x \in E_K \mid x(a) = \xi\}$ y consideremos ahora la multifunción $\Phi : \mathbf{E}_K^\xi \to C([t_0,T];\mathbb{R}^n)$ dada por la fórmula

$$\Phi(x) = \{y \in C([a,b];\mathbb{R}^n) \mid y \in AC([a,b];\mathbb{R}^n),\ y(a) = \xi,\ \dot{y}(t) \in F(t,x(t)),\ \text{c.t.p. } t \in [a,b]\}.$$

Notemos que $x \in \mathbb{S}^F(\xi)$ si y sólo si x es un punto fijo de Φ. Repitiendo los argumentos usados para demostrar el Teorema de Castaing (Teorema 4.2.4) es fácil ver que Φ verifica las hipótesis del Teorema de punto fijo de Kakutani (Teorema 2.2.6). Esto implica que $\mathbb{S}^F(\xi)$ es no vacío.

Observemos que el conjunto de puntos fijos de Φ es cerrado, pues Φ es s.c.s.. En consecuencia, $\mathbb{S}^F(\xi)$ es cerrado ya coincide con el conjunto de puntos fijos de Φ. Má aún, $\mathbb{S}^F(\xi)$ es cerrado y está contenido en $\mathbf{E}_K^\xi$, que sabemos es compacto.

Para concluir, resta ver que $\mathbb{S}^F$ como multifunción es s.c.s. en K. Ahora bien, como $\operatorname{gr}(\mathbb{S}^F)$ está contenido en un compacto, para concluir bastará ver que $\operatorname{gr}(\mathbb{S}^F)$ es cerrado en $\mathbb{R}^n \times C([a,b];\mathbb{R}^n)$.

Sea $\{(\xi_i, x_i)\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \operatorname{gr}(\mathbb{S}^F)$ una sucesión convergente a (ξ, x) en $\mathbb{R}^n \times C([a,b];\mathbb{R}^n)$. Dado que $x_i(a) = \xi_i$, es fácil ver que $x(a) = \xi$. Además, usando el hecho que $\|\dot{x}_i(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \alpha(t)$ para c.t.p. $t \in [a,b]$, gracias al Lema 4.2 tenemos que (pasando a una subsucesión que denotaremos igual) $\dot{x}_i \rightharpoonup \dot{x}$ débilmente en $L^1([a,b];\mathbb{R}^n)$. En particular, tenemos que $x \in AC([a,b];\mathbb{R}^n)$.

Por otro lado, gracias al Lema de Mazur, podemos construir una sucesión $v_i \in \text{co}\left(\bigcup_{j=i}^{+\infty}\{\dot{x}_j\}\right)$ tal que $v_i \to \dot{x}$ fuertemente en $L^1([a,b];\mathbb{R}^n)$, la cual también podemos asumir que converge puntualmente para c.t.p. $t \in [a,b]$. Notemos que

$$\dot{x}(t) \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \overline{\text{co}\left(\bigcup_{j=i}^{+\infty}\{\dot{x}_j(t)\}\right)} \subseteq \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \text{co}\left(\overline{\bigcup_{j=i}^{+\infty}\{\dot{x}_j(t)\}}\right) \subseteq \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \text{co}\left(\overline{\bigcup_{j=i}^{+\infty} F(t,x_j(t))}\right), \quad \text{c.t.p. } t \in [a,b].$$

Para concluir tenemos por lo tanto que probar

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} \text{co}\left(\overline{\bigcup_{j=i}^{+\infty} F(t,x_j(t))}\right) \subseteq F(t,x(t)), \quad \text{c.t.p. } t \in [a,b].$$

Tomemos $\varepsilon > 0$, luego dado que F es mediblemente s.c.s., existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$F(t,x_j(t)) \subseteq F(t,x(t)) + \overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n}(\varepsilon), \qquad \forall j \geq i_0.$$

Luego tenemos

$$\bigcup_{j=i_0}^{+\infty} F(t,x_j(t)) \subseteq F(t,x(t)) + \overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n}(\varepsilon).$$

Dado que $F(t,x(t))$ y $\overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n}(\varepsilon)$ son conjuntos compactos y convexos, su suma es también un conjunto compacto y convexo. A partir de esto obtenemos

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} \text{co}\left(\overline{\bigcup_{j=i}^{+\infty} F(t,x_j(t))}\right) \subseteq \text{co}\left(\overline{\bigcup_{j=i_0}^{+\infty} F(t,x_j(t))}\right) \subseteq F(t,x(t)) + \overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n}(\varepsilon).$$

Luego, haciendo $\varepsilon \to 0$ y usando el hecho que $F(t,x(t))$ es cerrado, concluimos que $\mathbb{S}^F$ es una multifunción s.c.s. en K.

Finalmente, notando que si $\{(\xi_i,\bar{x}_i)\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \text{gr}(\mathscr{U}_T^F)$ es una sucesión convergente a $(\xi,\bar{x})$ en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, entonces existe una sucesión $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq AC([a,b];\mathbb{R}^n)$ tal que $\bar{x}_i = x_i(T)$ y $x_i \in \mathbb{S}^F(\xi_i)$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que x_i converge uniformemente a alguna función $x \in AC([a,b];\mathbb{R}^n)$. Por la parte anterior podemos concluir que $x \in \mathbb{S}^F(\xi)$, y por lo tanto, $\bar{x} = x(T)$. Esto implica que $\text{gr}(\mathscr{U}_T^F)$ es cerrado, y dado que sus imágenes son conjuntos compactos, concluimos que $\mathscr{U}_T^F$ es una multifunción s.c.s. en K. □

6.2.2 Caso dinámica mediblemente Lipschitz continua

Ahora pasaremos a estudiar el caso de dinámicas mediblemente Lipschitz continuas. En este caso el Teorema de Filippov jugará un rol importante.

Teorema 6.2.2 Supongamos que $F\colon [a,b] \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ es una multifunción $\mathscr{L} \times \mathscr{B}$ - medible. Si F es mediblemente ℓ-Lipschitz continua en $[a,b] \times \mathbb{R}^n$ y sus imágenes son conjuntos cerrados y no vacíos (no necesariamente convexos), entonces la multifunción $\mathbb{S}^F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows C([a,b];\mathbb{R}^n)$ es Lipschitz continua. Más aún para todo $T \in [a,b]$, la multifunción $\mathscr{U}_T^F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ es también Lipschitz continua (con la misma constante de Lipschitz).

Demostración. Tomemos $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n$, $x_1 \in \mathbb{S}^F(\xi_1)$ y $\tilde{a} = a - 1$. Definamos $\tilde{F} : [\tilde{a}, b] \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ vía la fórmula

$$\tilde{F}(t,x) := \begin{cases} F(t,x) & \text{si } (t,x) \in [a,b] \times \mathbb{R}^n \\ \{\xi_2 - \xi_1\} & \text{si } (t,x) \in [\tilde{a},a) \times \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Notemos que $\tilde{F}$ es mediblemente $\tilde{\ell}$-Lipschitz continua en $[\tilde{a},b] \times \mathbb{R}^n$ y sus imágenes son conjuntos cerrados y no vacíos, donde

$$\tilde{\ell}(t) := \begin{cases} \ell(t) & \text{si } t \in [a,b], \\ 0 & \text{si } t \in [\tilde{a},a). \end{cases}.$$

En particular, $\tilde{F}$ verifica las hipótesis del Teorema de Filippov (Teorema 5.1.6).

Consideremos la curva $x_0 \in AC([\tilde{a},b];\mathbb{R}^n)$ dada por

$$x_0(t) := \begin{cases} x_1(t) & \text{si } t \in [a,b], \\ \xi_1 & \text{si } t \in [\tilde{a},a). \end{cases}$$

Notemos que

$$\rho_{\tilde{F}}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) := \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [a,b], \\ \|\xi_2 - \xi_1\|_{\mathbb{R}^n} & \text{si } t \in [\tilde{a},a). \end{cases}$$

donde $\rho_{\tilde{F}}$ es la función dada por (5.1). Por lo tanto, si definimos

$$\varepsilon := 2\|\xi_2 - \xi_1\|_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\int_a^b \ell(t)dt\right)$$

tendremos

$$\rho_{\tilde{F}}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) < \varepsilon \exp\left(-\int_{\tilde{a}}^b \tilde{\ell}(t)dt\right).$$

Luego, gracias al Teorema de Filippov, existe una trayectoria $x \in AC([\tilde{a},b];\mathbb{R}^n)$, con $\|x - x_0\|_\infty \leq \varepsilon$, solución del problema de Cauchy

$$\dot{x}(t) \in \tilde{F}(t,x(t)), \qquad \text{en c.t.p. } t \in [\tilde{a},b], \qquad x(\tilde{a}) = x_0(\tilde{a}) = \xi_1.$$

Lo anterior implica que $x(t) = \xi_1 + t(\xi_2 - x_1)$ para todo $t \in [\tilde{a},a]$. Luego definiendo x_2 como la restricción de x al intervalo $[a,b]$, tenemos que $x_2 \in \mathbb{S}^F(\xi_2)$. Recordemos también que

$$\|x - x_0\|_\infty \leq \varepsilon = 2\|\xi_2 - \xi_1\|_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\int_a^b \ell(t)dt\right).$$

Dado que $x_1 = x_0|_{[a,b]}$ y $x_2 = x|_{[a,b]}$, tenemos

$$\|x_1 - x_2\|_\infty \leq \varepsilon = 2\exp\left(\int_a^b \ell(t)dt\right)\|\xi_2 - \xi_1\|_{\mathbb{R}^n}.$$

A partir de esto podemos concluir que $\mathbb{S}^F$ es una multifunción Lipschitz continua de módulo

$$L = 2\exp\left(\int_a^b \ell(t)dt\right).$$

Además, dado $\bar{x}_1 \in \mathscr{U}_T^F(\xi_1)$ sabemos que existe $\tilde{x}_1 \in \mathbb{S}^F(\xi_1)$ tal que $\tilde{x}_1(T) = \bar{x}_1$. Dado que $\mathbb{S}^F$ es una multifunción Lipschitz continua de módulo L, tenemos que existe $\tilde{x}_2 \in \mathbb{S}^F(\xi_2)$ tal que

$$\|\tilde{x}_1(T) - \tilde{x}_2(T)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \|\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2\|_\infty \leq \varepsilon = 2\exp\left(\int_a^b \ell(t)dt\right)\|\xi_2 - \xi_1\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Luego, usando el hecho que $\tilde{x}_2(T) \in \mathscr{U}_T^F(\xi_2)$, podemos concluir que $\mathscr{U}_T^F$ es una multifunción Lipschitz continua de módulo L. □

Conexidad del conjunto de soluciones

Hasta ahora hemos visto que los conjuntos $\mathbb{S}^F(\xi)$ y $\mathscr{U}_T^F(\xi)$ son conjuntos cerrados. Cabe destacar, que en general estos conjuntos no son convexos. Sin embargo, como veremos a continuación éstos son conjuntos conexos por caminos.

Por el momento asumiremos el siguiente lema técnico, necesario para demostrar el teorema enunciado más abajo.

Lema 6.1 Supongamos que $F\colon [a,b]\times\mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ es una multifunción mediblemente ℓ-Lipschitz continua en $[a,b]\times\mathbb{R}^n$ y sus imágenes son conjuntos cerrados, convexos y no vacíos. Asumamos que $\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función integrable ($\mathscr{L}$-medible) positiva, y que existen un par de sucesiones $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{y_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq L^1([a,b];\mathbb{R}^n)$ tales que

$$\|w_i(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \alpha(t), \qquad \text{c.t.p. } t\in[a,b],$$

donde $w_i(t) := w(t,x_i(t),y_i(t)) - y_i(t)$ c.t.p. $t\in[a,b]$ y $w(t,x,y) := \mathsf{proy}\,(y,F(t,x))$ para todo $(t,x,y)\in[a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$. Si $x_i\to\bar{x}$ e $y_i\to\bar{y}$ en $L^1([a,b];\mathbb{R}^n)$, entonces $w_i\to\bar{w} := w(\cdot,\bar{x},\bar{y}) - \bar{y}$ en $L^1([a,b];\mathbb{R}^n)$.

Teorema 6.2.3 Supongamos que $F\colon [a,b]\times\mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ es una multifunción $\mathscr{L}\times\mathscr{B}$ - medible. Si F es mediblemente ℓ-Lipschitz continua en $[a,b]\times\mathbb{R}^n$ y sus imágenes son conjuntos cerrados, convexos y no vacíos, entonces las imágenes de la multifunción $\mathbb{S}^F:\mathbb{R}^n \rightrightarrows C([a,b];\mathbb{R}^n)$ son conjuntos conexos por caminos. Más aún para todo $T\in[a,b]$, las imágenes de la multifunción $\mathscr{U}_T^F:\mathbb{R}^n\rightrightarrows\mathbb{R}^n$ son también conjuntos conexos por caminos.

Demostración. La idea de la demostración consiste en probar que, dados $x_0,x_1\in\mathbb{S}^F(\xi)$ existe una función continua $h:[0,1]\to C([a,b];\mathbb{R}^n)$ tal que $h(\lambda)\in\mathbb{S}^F(\xi)$ para todo $\lambda\in[0,1]$, con $h(0)=x_0$ y $h(1)=x_1$.

Fijemos $x_0,x_1\in\mathbb{S}^F(\xi)$. Luego, dado $\lambda\in[0,1]$, denotemos por $y_\lambda := x_0+\lambda(x_1-x_0)$. Notemos que para c.t.p. $t\in[a,b]$ tenemos

$$\begin{aligned}
\rho_F(t,y_\lambda(t),\dot{y}_\lambda(t)) &= \mathrm{dist}\,(\dot{x}_0(t)+\lambda(\dot{x}_1(t)-\dot{x}_0(t)),F(t,x_0(t)+\lambda(x_1(t)-x_0(t))))\\
&\leq \mathrm{dist}\,(\dot{x}_0(t),F(t,x_0(t)+\lambda(x_1(t)-x_0(t))))+\lambda\|\dot{x}_1(t)-\dot{x}_0(t)\|_{\mathbb{R}^n}\\
&\leq d_H(F(t,x_0(t),F(t,x_0(t)+\lambda(x_1(t)-x_0(t))))+\lambda\|\dot{x}_1(t)-\dot{x}_0(t)\|_{\mathbb{R}^n}\\
&\leq \ell(t)\lambda\|x_1(t)-x_0(t)\|_{\mathbb{R}^n}+\lambda\|\dot{x}_1(t)-\dot{x}_0(t)\|_{\mathbb{R}^n}\\
&\leq \ell(t)\lambda\int_a^b\|\dot{x}_1(t)-\dot{x}_0(t)\|_{\mathbb{R}^n}+\lambda\|\dot{x}_1(t)-\dot{x}_0(t)\|_{\mathbb{R}^n}.
\end{aligned}$$

Luego, denotando $\alpha(t)=\|\dot{x}_1(t)-\dot{x}_0(t)\|$ tenemos

$$\int_a^b\rho_F(t,y_\lambda(t),\dot{y}_\lambda(t))\leq\lambda\int_a^b\alpha(t)dt\left(1+\int_a^b\ell(t)dt\right).$$

Notemos también que $y_\lambda = x_0 + \lambda(x_1 - x_0) = x_1 + (1-\lambda)(x_0 - x_1)$, luego repitiendo los argumentos anteriores obtenemos

$$\int_a^b \rho_F(t, y_\lambda(t), \dot{y}_\lambda(t)) \leq (1-\lambda)\int_a^b \alpha(t)dt \left(1 + \int_a^b \ell(t)dt\right).$$

En particular, esto implica que

$$\left(\int_a^b \rho_F(t, y_\lambda(t), \dot{y}_\lambda(t))dt\right)^2 \leq \lambda(1-\lambda)\left(\int_a^b \alpha(t)dt\right)^2 \left(1 + \int_a^b \ell(t)dt\right)^2.$$

Ahora, definiendo

$$c = \int_a^b \alpha(t)dt \left(1 + \int_a^b \ell(t)dt\right)\exp\left(\int_a^b \ell(t)dt\right)$$

obtenemos

$$\int_a^b \rho_F(t, y_\lambda(t), \dot{y}_\lambda(t)) \leq c\sqrt{\lambda(1-\lambda)}\exp\left(-\int_a^b \ell(t)dt\right).$$

Luego, gracias al Teorema de Filippov, para cada $\lambda \in (0,1)$ existe una trayectoria $x^\lambda \in AC([a,b];\mathbb{R}^n)$, con $\|x^\lambda - y_\lambda\|_\infty \leq c\sqrt{\lambda(1-\lambda)}$, solución del problema de Cauchy

$$\dot{x}(t) \in \tilde{F}(t, x(t)), \qquad \text{en c.t.p. } t \in [a,b], \qquad x(a) = y_\lambda(a).$$

Notemos que si la función

$$h(\lambda) := \begin{cases} x^\lambda & \text{si } \lambda \in (0,1) \\ x_0 & \text{si } \lambda = 0 \\ x_1 & \text{si } \lambda = 1 \end{cases}$$

fuese continua podríamos concluir el resultado. Recordemos que x^λ en el Teorema de Filippov se construye como el límite de una sucesión de funciones $\{x_k^\lambda\}_{k\in\mathbb{N}}$ que satisface en particular

$$\|\dot{x}^\lambda - \dot{x}_k^\lambda\|_{L^1} \leq \int_a^b \rho_F(t, y_\lambda(t), \dot{y}_\lambda(t))dt \sum_{i=k}^\infty \frac{1}{i!}\left(\int_a^b \ell(t)dt\right)^i$$

con $\rho_F(t, x_k^\lambda(t), \dot{x}_k^\lambda(t)) = \operatorname{dist}\left(\dot{x}_k^\lambda(t), F(t, x_k^\lambda(t))\right)$ para c.t.p. $t \in [a,b]$. Ahora bien, como F tiene imágenes convexas, la distancia se alcanza en un único punto que corresponde a $\dot{x}_{k+1}(t)$, y por lo tanto la sucesión $\{x_k^\lambda\}_{k\in\mathbb{N}}$ está únicamente determinada por el primer término de la sucesión $x_0^\lambda = y_\lambda$.

Usando la notación del Lema 6.1, tenemos que $\dot{x}_{k+1}^\lambda(t) = w(t, x_k^\lambda(t), \dot{x}_k^\lambda(t))$, y por lo tanto, es fácil ver que para $k \in \mathbb{N}$ fijo, la función $\lambda \mapsto x_k^\lambda$ es continua.

Por otro lado, dados $\lambda, \sigma \in [0,1]$ tenemos

$$\|\dot{x}^\lambda - \dot{x}^\sigma\|_{L^1} \leq \|\dot{x}^\lambda - \dot{x}_k^\lambda\|_{L^1} + \|\dot{x}_k^\lambda - \dot{x}_k^\sigma\|_{L^1} + \|\dot{x}_k^\sigma - \dot{x}^\sigma\|_{L^1}$$

Dado que para $k \in \mathbb{N}$ fijo, $\|\dot{x}_k^\lambda - \dot{x}_k^\sigma\|_{L^1} \to 0$ si $|\lambda - \sigma| \to 0$ y para $\lambda, \sigma \in [0,1]$ fijos $\|\dot{x}^\lambda - \dot{x}_k^\lambda\|_{L^1} + \|\dot{x}_k^\sigma - \dot{x}^\sigma\|_{L^1} \to 0$, concluimos que h es una función continua. $\square$

III

Aplicaciones en Optimización Continua

7. Problemas de Control Óptimo

En esta parte estudiaremos algunas aplicaciones en optimización de la teoría de inclusiones diferenciales que hemos desarrollado hasta ahora.

Nos interesa primero estudiar problemas del tipo

$$\text{Minimizar} \int_a^b L(t,x(t),u(t))dt + g(x(b)) \quad \text{sobre todas las funciones } \mathscr{L}-\text{medibles } u : [a,b] \to \mathbb{R}^m$$

sujeto a una restricción dinámica sobre la velocidad

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t)), \qquad \text{c.t.p } t \in [a,b]$$

tal que

$$x(a) \in K \quad \text{y} \quad u(t) \in U \subseteq \mathbb{R}^m \quad \text{c.t.p } t \in [a,b]$$

donde

- $x : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ es el estado,
- $u : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ es el control,
- $U \subseteq \mathbb{R}^m$ es el espacio de controles,
- $L : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es el Lagrangeano,
- $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es el costo del punto final,
- $f : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es la dinámica del sistema,
- $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es el conjunto de condiciones iniciales.

7.1 Inclusiones Diferenciales y control óptimo

Supongamos que (x,u) es un proceso admisible, es decir $x \in AC([a,b];\mathbb{R}^n)$ es una trayectoria del sistema de control:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t)), & \text{c.t.p } t \in [a,b], \\ x(a) = \xi, \quad u(t) \in U & \text{c.t.p } t \in [a,b]. \end{cases} \tag{7.1}$$

asociada al control $t \mapsto u(t)$. Luego claramente $x \in \mathbb{S}^F(\xi)$, donde

$$F(t,x) = f(t,x,U) := \{v \in \mathbb{R}^n \mid \exists u \in U,\ v = f(t,x,u)\}. \tag{7.2}$$

Si $x \in \mathbb{S}^F(\xi)$ Â¿Podemos afirmar que x es solución de (7.1) para algún control? La respuesta a esto viene dada por el siguiente resultado.

Teorema 7.1.1 — Selección de Filippov. Supongamos que $\phi : [a,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es una función de Carathéodory, $v : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ es una función $\mathscr{L}$- medible y $U \subseteq \mathbb{R}^m$ es un conjunto cerrado y no vacío. Si $v(t) \in \phi(t,U)$ c.t.p. $t \in [a,b]$, entonces existe una función $\mathscr{L}$- medible $u : [a,b] \to U$ tal que

$$v(t) = \phi(t,u(t)) \qquad \text{c.t.p. } t \in [a,b].$$

Demostración. Definamos la multifunción $\mathscr{Q} : [a,b] \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ dada por

$$\mathscr{Q}(t) := \{u \in U \mid v(t) = \phi(t,u)\}, \qquad \forall t \in [a,b].$$

Sabemos que existe un conjunto medible $I \subseteq [a,b]$ tal que $\mu_1([a,b] \setminus I) = 0$, tal que $v(t) \in \phi(t,U)$ para todo $t \in I$. En particular, $\mathscr{Q}(t) \neq \emptyset$ para todo $I \in I$. Luego, podemos asumir que $\mathscr{Q}(t) \neq \emptyset$ para todo $t \in [a,b]$ redefiniendo $\mathscr{Q}(t) = U$ en cada $t \in [a,b] \setminus I$. Más aún, para cada $t \in [a,b]$ fijo, dado que U es cerrado y la función $u \mapsto \phi(t,u)$ es continua, tenemos también que $\mathscr{Q}(t)$ es cerrado.

La conclusión vendrá entonces del hecho que $\mathscr{Q}$ es una multifunción $\mathscr{L}$-medible y del Teorema de selección medible (Teorema 4.2.2).

Veamos que efectivamente $\mathscr{Q}$ es una multifunción $\mathscr{L}$-medible. Sea $\mathscr{O} \subseteq \mathbb{R}^m$ un conjuntos abierto. Notemos que $\mathscr{Q}^{-1}(\mathscr{O})$ corresponde a la proyección sobre la variable t del conjunto

$$G = \{(t,u) \in [a,b] \times \mathbb{R}^m \mid v(t) = \phi(t,u)\} \cap [a,b] \times (U \cap \mathscr{O}) = \psi^{-1}(\{0\}) \cap [a,b] \times (U \cap \mathscr{O}),$$

donde $\psi(t,u) = v(t) - \phi(t,u)$. Es fácil ver que $\psi : [a,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es función de Carathéodory, y por lo tanto, gracias al Lema 5.1, es $\mathscr{L} \times \mathscr{B}$-medible. Luego, $\psi^{-1}(\{0\})$ es un conjunto $\mathscr{L} \times \mathscr{B}$-medible. Dado que $[a,b] \times (U \cap \mathscr{O})$ es un conjunto $\mathscr{L} \times \mathscr{B}$-medible, gracias al Teorema de Proyección medible (Lema 4.3), concluimos que $\mathscr{Q}$ es una multifunción $\mathscr{L}$-medible. $\square$

Corolario 7.1.2 Supongamos que $U \subseteq \mathbb{R}^m$ es un conjunto cerrado y no vacío, y $f\colon [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es una función de Carathéodory, es decir, $t \mapsto f(t,x,u)$ es $\mathscr{L}$-medible y $(x,u) \mapsto f(t,x,u)$ es continua. Si $x \in \mathbb{S}^F(\xi)$ con F dado por (7.2), entonces existe un control $\mathscr{L}$- medible $u : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ tal que

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t)) \quad \text{y} \quad u(t) \in U \subseteq \mathbb{R}^m \quad \text{c.t.p } t \in [a,b].$$

Demostración. Basta aplicar el Teorema 7.1.1 con $\phi(t,u) = f(t,x(t),u)$, notando que, dado que f es de Carathéodory y $t \mapsto x(t)$ es continua (en particular, $\mathscr{L}$-medible), tenemos que ϕ es una función de Carathéodory. $\square$

7.2 Problema de Mayer

Supongamos que $F\colon [a,b] \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ es una multifunción dada. Dado $K \subseteq \mathbb{R}^n$, consideremos el siguiente problema

$$\text{Minimizar } g(x(b)) \quad \text{sobre todos los } x \in \mathbb{S}^F(\xi), \quad \text{con } \xi \in K. \tag{7.3}$$

Teorema 7.2.1 Supongamos que F es mediblemente s.c.s., sus imágenes son conjuntos compactos, convexos y no vacíos, y existe una función $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable ($\mathscr{L}$-medible) y positiva tal que

$$\|v\|_{\mathbb{R}^n} \leq \alpha(t), \qquad \forall (t,x) \in [a,b] \times \mathbb{R}^n,\ v \in F(t,x).$$

Supongamos que $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto compacto, convexo y no vacío. Si $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ semicontinua inferior y existe $x \in \mathbb{S}^F(\xi)$ tal que $g(x(b)) \in \mathbb{R}$ para algún $\xi \in K$, entonces el problema de Mayer (7.3) tiene al menos una solución óptima.

Demostración. Primero que todo, notemos que dado que existe $x \in \mathbb{S}^F(\xi)$ tal que $g(x(b)) \in \mathbb{R}$ para algún $\xi \in K$, tenemos que el problema de Mayer es factible, y por lo tanto podemos tomar una sucesión minimizante, es decir, existe una sucesión $\{\xi_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in K$ y una sucesión $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in AC([a,b];\mathbb{R}^n)$ tal que $x_i \in \mathbb{S}^F(\xi_i)$ para cada $i \in \mathbb{N}$ que verifica

$$g(x_i(b)) \to \text{ínf}\left\{g(x(b)) \mid \xi \in K,\ x \in \mathbb{S}^F(\xi)\right\}$$

Dado que K es compacto, podemos asumir, pasando a una subsucesión si fuese necesario, que existe $\bar{\xi} \in K$ tal que $\xi_i \to \bar{\xi}$. Además, dado que

$$\|\dot{x}_i(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \alpha(t), \qquad \text{c.t.p. } t \in [a,b],$$

Por el Teorema de Compacidad en $AC([a,b];\mathbb{R}^n)$ (Lema 4.2), podemos asumir que existe $\bar{x} \in AC([a,b];\mathbb{R}^n)$ tal que $x_i \to \bar{x}$ uniformemente en $[a,b]$ y $\dot{x}_i \to \dot{\bar{x}}$ débilmente en $L^1([a,b];\mathbb{R}^n)$. Además, gracias al Teorema de Castaing II (Teorema 6.2.1) tenemos que $\bar{x} \in \mathbb{S}^F(\bar{\xi})$. Finalmente, dado que g es s.c.i. tenemos que

$$g(\bar{x}(b)) \leq \liminf_{i\to+\infty} g(x_i(b)) = \text{ínf}\left\{g(x(b)) \mid \xi \in K,\ x \in \mathbb{S}^F(\xi)\right\},$$

por lo tanto, $\bar{x}$ es una solución óptima del problema de Mayer (7.3). □

7.3 Problema de Bolza

Ahora estudiaremos la existencia de soluciones óptimas de problemas del tipo

$$\text{Minimizar} \int_a^b L(t,x(t),u(t))dt + \varphi(x(b)) \quad \text{sobre todas las funciones } \mathscr{L}\text{−medibles } u : [a,b] \to \mathbb{R}^m$$

sujeto a una restricción dinámica sobre la velocidad

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t)), \qquad \text{c.t.p } \ t \in [a,b]$$

tal que

$$x(a) \in K \subseteq \mathbb{R}^n \quad \text{y} \quad u(t) \in U \subseteq \mathbb{R}^m \quad \text{c.t.p } \ t \in [a,b],$$

asociado al Lagrangeano $L : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, costo del punto final $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ y dinámica del sistema $f : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.

Veamos primero que el problema está bien definido, para esto veremos que el costo integral está bien definido y luego que el problema es factible, al menos desde el punto del sistema dinámico que hay detrás.

Proposición 7.3.1 Supongamos que $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo. Si $L\colon [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ es una función de Carathéodory, es decir, $t \mapsto L(t,x,u)$ es $\mathscr{L}$-medible y $(x,u) \mapsto L(t,x,u)$ es continua, y existe una función $\alpha_L : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable ($\mathscr{L}$-medible) y positiva tal que

$$|L(t,x,u)| \leq \alpha_L(t), \qquad \forall (t,x,u) \in [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \tag{7.4}$$

entonces para todas las funciones $\mathscr{L}-$medibles $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ y $u : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ se tiene que la función $t \mapsto L(t,x(t),u(t))$ es integrable ($\mathscr{L}-$medible) en $[a,b]$.

Demostración. Basta notar que, dado que L es una función de Carathéodory, gracias al Lema 5.1 la función $t \mapsto L(t,x(t),u(t))$ es $\mathscr{L}$-medible, y por lo tanto, gracias a (7.4), es también integrable. □

Veamos ahora que el sistema de control es factible, es decir, existen trayectorias asociadas a este.

Proposición 7.3.2 Supongamos que $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo y $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto compacto, convexo y no vacío. Si $f\colon [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es una función de Carathéodory, es decir, $t \mapsto f(t,x,u)$ es $\mathscr{L}$-medible y $(x,u) \mapsto f(t,x,u)$ es continua, y existe una función $\alpha_f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable ($\mathscr{L}$-medible) y positiva tal que

$$\|f(t,x,u)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \alpha_f(t), \qquad \forall (t,x,u) \in [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m.$$

Entonces para todo $\xi \in K$ y toda función $\mathscr{L}-$medible $u : [a,b] \to \mathbb{R}^m$, existe $x \in AC([a,b];\mathbb{R}^n)$ que satisface:

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t)), \qquad \text{c.t.p } t \in [a,b], \qquad \text{con} \quad x(a) = \xi. \tag{7.5}$$

Demostración. Basta usar el Teorema de existencia de Castaing (Teorema 4.2.4) con

$$F(t,x) = \{f(t,x,u(t))\}, \qquad \forall t \in [a,b],\ x \in \mathbb{R}^n.$$

□

En adelante, denotaremos por $\mathbb{S}_u^f(\xi)$ al conjunto de soluciones del sistema de control (7.5).

Teorema 7.3.3 Supongamos que las hipótesis de la Proposición 7.3.1 y Proposición 7.3.2 se satisfacen y que

$$\{(v,r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid \ \exists u \in U,\ v = f(t,x,u),\ L(t,x,u) \leq r \leq \alpha_L(t)\}.$$

es un conjunto convexo para todo $(t,x) \in [a,b] \times \mathbb{R}^n$ y que U es compacto.

Si $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ semicontinua inferior y existe $x \in \mathbb{S}_u^f(\xi)$ tal que $\varphi(x(b)) \in \mathbb{R}$ para algún $\xi \in K$ y algún control $u \in \mathscr{U}$, entonces existen $\bar{\xi} \in K$, un control $\bar{u} \in \mathscr{U}$ y una trayectoria $\bar{x} \in \mathbb{S}_{\bar{u}}^f(\bar{\xi})$ tal que

$$\int_a^b L(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t))dt + \varphi(\bar{x}(b)) \leq \int_a^b L(t,x(t),u(t))dt + \varphi(x(b)), \quad \forall \xi \in K,\ u \in \mathscr{U},\ x \in \mathbb{S}_u^f(\xi), \tag{7.6}$$

donde $\mathscr{Q}$ denota al conjunto de todas las funciones (controles) $\mathscr{L}-$medibles $u : [a,b] \to U$.

Demostración. La idea de la demostración es transformar el problema de Bolza en un problema de Mayer y usar el Teorema 7.2.1.

Consideremos la función $g\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definida por

$$g(x,z) = \varphi(x) + z, \qquad \forall (x,z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

y la dinámica $F\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ dada por

$$F(t,(x,z)) := \{(v,r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid \ \exists u \in U,\ v = f(t,x,u),\ L(t,x,u) \leq r \leq \alpha_L(t)\}.$$

Claramente, g es semicontinua inferior y F es una multifunción cuyas imágenes son conjuntos convexos, compactos y no vacío. Además, no es difícil ver que si $x \in \mathbb{S}^f_u(\xi)$ es como en el enunciado, entonces tenemos $(x,z) \in \mathbb{S}^F(\xi,0)$ con $g(x(b),z(b)) \in \mathbb{R}$, donde

$$z(s) := \int_a^s L(t,x(t),u(t))dt, \qquad \forall s \in [a,b].$$

Notemos también que

$$\|(v,r)\|_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}} \leq \alpha_f(t) + \alpha_L(t), \qquad \forall (t,x,z) \in [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R},\ (v,r) \in F(t,(x,z)) \tag{7.7}$$

y que $K \times \{0\}$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Luego, para poder utilizar el Teorema 7.2.1 debemos ver que F es mediblemente s.c.s.

Fijemos primero $t \in [a,b]$. Notemos que debido a la continuidad de los datos del problema, la multifunción $(x,z) \mapsto F(t,(x,z))$ tiene grafo cerrado. Ahora bien, dado que (7.7) se verifica, podemos concluir que $(x,z) \mapsto F(t,(x,z))$ es de hecho s.c.s. en vista de la Proposición 2.2.2.

Fijemos ahora $(x,z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Afirmamos que $t \mapsto F(t,(x,z))$ es $\mathscr{L}$-medible. En efecto, dado $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto, tenemos que

$$\{t \in [a,b] \mid F(t,(x,z)) \cap A \times I \neq \emptyset\} = \{t \in [a,b] \mid \exists u \in U,\ f(t,x,u) \in A,\ [L(t,x,u),\alpha_L(t)] \cap I \neq \emptyset\}.$$

Observemos que el conjunto del lado derecho se puede escribir como la proyección sobre la variable t de

$$G = \{(t,u) \in [a,b] \times U \mid f(t,x,u) \in A,\ [L(t,x,u),\alpha_L(t)] \cap I \neq \emptyset\}.$$

Ahora bien, dado que las funciones $(t,u) \mapsto f(t,x,u)$ y $(t,u) \mapsto L(t,x,u)$ son funciones de Carathéodory, tenemos que L es $\mathscr{L} \times \mathscr{B}$-medible, y por lo tanto, gracias al Teorema de Proyección medible (Teorema 4.3) concluimos que $t \mapsto F(t,(x,z))$ es $\mathscr{L}$-medible, y por lo tanto F es mediblemente s.c.s.

Sigue que, gracias al Teorema 7.2.1, existen $\bar{\xi} \in K$ y $(\bar{x},\bar{z}) \in \mathbb{S}^F(\bar{\xi},0)$ tales que

$$\varphi(\bar{x}(b)) + \bar{z}(b) \leq \varphi(x(b)) + z(b), \qquad \forall \xi \in K,\ (x,z) \in \mathbb{S}^F(\xi,0).$$

Esto implica en particular que

$$\varphi(\bar{x}(b)) + \bar{z}(b) \leq \varphi(x(b)) + \int_a^b L(t,x(t),u(t))dt, \qquad \forall u \in \mathscr{Q},\ \xi \in K, x \in \mathbb{S}^f_u(\xi).$$

Notemos que

$$(\dot{\bar{x}}(t),\dot{\bar{z}}(t)) \in h(t,\bar{x}(t),U) + \{0\} \times [0,\alpha_L(t)],$$

donde $h(t,x,u) = (f(t,x,u), L(t,x,u))$. En particular, tenemos que la multifunción

$$t \mapsto (h(t,\bar{x}(t),U) - (\dot{\bar{x}}(t),\dot{\bar{z}}(t))) \cap \{0\} \times [0,\alpha_L(t)]$$

es $\mathscr{L}$-medible y tiene imágenes cerradas, y por lo tanto, existe una función $\mathscr{L}$-medible no negativa $t \mapsto s(t)$ tal que

$$(\dot{\bar{x}}(t), \dot{\bar{z}}(t) - s(t)) \in h(t,\bar{x}(t),U).$$

Usando el Teorema de selección de Filippov tenemos que existe una función $\mathscr{L}$-medible (un control) $t \mapsto \bar{u}(t)$ tal que

$$\dot{\bar{x}}(t) = f(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)), \quad u(t) \in U \quad \text{y} \quad \dot{\bar{z}}(t) - s(t) = L(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)), \qquad \text{c.t.p. en } [a,b].$$

Finalmente, dado que

$$\int_a^b L(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t))dt \leq \int_a^b [L(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)) + s(t)]dt = \int_a^b \dot{\bar{z}}(t)dt = \bar{z}(b) - \bar{z}(a) = \bar{z}(b)$$

obtenemos el resultado buscado. $\square$

8. Sistemas Hamiltonianos

En Mecánica clásica, un sistema Hamiltoniano es una EDO del tipo

$$\dot{x}(t) = \nabla_y H(t, x(t), y(t)), \quad -\dot{y}(t) = \nabla_x H(t, x(t), y(t)), \qquad \forall t \in (a, b),$$

donde $H : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable llamada Hamiltoniano, generalmente asociada a la energía mecánica del sistema.

Sistemas Hamiltonianos permiten describir la evolución de un sistema físico, como por ejemplo:

- un sistema planetario;
- un electrón en un campo electromagnético

8.1 Funciones cóncavas-convexas

Definición 8.1.1 Diremos que una función $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ es cóncava-convexa si para cualquier $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ fijos tenemos que

$i)$ $x \mapsto h(x, \bar{y})$ es cóncava $\qquad$ $ii)$ $y \mapsto h(\bar{x}, y)$ es convexa.

Además, el dominio efectivo de h lo definiremos como el conjunto:

$$\mathrm{dom}(h) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x,y) > -\infty,\ \forall y \in \mathbb{R}^n\} \times \{y \in \mathbb{R}^n \mid h(x,y) < +\infty,\ \forall x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Diremos que h es propia si su dominio efectivo es no vacío.

Si $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ es cóncava-convexa y $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{dom}(h)$ entonces denotaremos por

- $\partial_x h(\bar{x}, \bar{y}) = -\partial(-h(\cdot, \bar{y}))(\bar{x})$, es decir, $p \in \partial_x h(\bar{x}, \bar{y})$ si y sólo si

$$h(\bar{x}, \bar{y}) + p^\top (x - \bar{x}) \geq h(x, \bar{y}), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

- $\partial_y h(\bar{x},\bar{y}) = \partial(h(\bar{x},\cdot))(\bar{y})$, es decir, $q \in \partial_y h(\bar{x},\bar{y})$ si y sólo si

$$h(\bar{x},\bar{y}) + q^\top(y-\bar{y}) \leq h(\bar{x},y), \qquad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Definición 8.1.2 Supongamos que $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ es una función cóncava-convexa y propia. Definimos el subdiferencial (cóncavo-convexo) h en $(\bar{x},\bar{y}) \in \mathrm{dom}(h)$ como el conjunto

$$\partial h(\bar{x},\bar{y}) := \partial_x h(\bar{x},\bar{y}) \times \partial_y h(\bar{x},\bar{y}).$$

8.2 Sistemas Hamiltonianos generalizados

Dada una función $H : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, tal que $(x,y) \mapsto H_t(x,y) := H(t,x,y)$ es cóncava-convexa para todo $t \in [a,b]$ fijo, nos interesa estudiar la siguiente versión no-diferenciable de sistema Hamiltoniano:

$$-\dot{y}(t) \in \partial_x H(x(t),y(t)) \quad \text{and} \quad \dot{x}(t) \in \partial_y H(x(t),y(t)), \quad \text{c.t.p. } t \in [a,b].$$

En particular nos interesa estudiar:
- Existencia de soluciones;
- Propiedades cualitativas del conjunto de trayectorias.

8.2.1 Motivación: Relación con Calculo de Variaciones

Lema 8.1 Supongamos que $L : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es una función tal que $(x,y) \mapsto L_t(x,v) := L(t,x,v)$ es convexa. Luego la función $H : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ definida por

$$H(t,x,y) := L(t,x,\cdot)^*(y) = \sup_{v \in \mathbb{R}^n} v^\top y - L(t,x,v), \qquad \forall (t,x,y) \in [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

es tal que $(x,y) \mapsto H_t(x,y) := H(t,x,y)$ es cóncava-convexa para todo $t \in [a,b]$ fijo.

Además, si L es propia y semicontinua inferior, entonces

$$(y,w) \in \partial L_t(x,v) \Longleftrightarrow (-w,v) \in \partial H_t(x,y) \qquad \forall (x,y) \in \mathrm{dom}(H_t),\ \forall v,w \in \mathbb{R}^n.$$

8.3 El subdiferencial de un Hamiltoniano

Para estudiar la existencia de trayectorias de un sistema Hamiltoniano lo primero que necesitamos ver es que la multifunción

$$(t,(x,y)) \mapsto \partial H_t(x,y), \qquad \forall (t,x,y) \in [a,b] \times \mathscr{O},$$

es mediblemente s.c.s. y sus imágenes son conjuntos compactos convexos y no vacíos.

Lema 8.2 Supongamos que $\mathscr{O} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto, que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es una función convexa y finita en $\mathscr{O}$ y que $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es una función convexa y finita en $\mathscr{O}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Si la sucesión $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a f en $\mathscr{O}$, entonces para toda sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{O}$ que converge a $\bar{x} \in \mathscr{O}$ tenemos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\partial f_k(x_k) \subseteq \partial f(x) + \mathbb{B}_{\mathbb{R}^n}(\varepsilon), \qquad \forall k \geq k_0.$$

Proposición 8.3.1 Supongamos que $\mathscr{O} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto y que $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ es una función cóncava-convexa. Si $h(x,y) \in \mathbb{R}$ para todo $(x,y) \in \mathscr{O}$, entonces la multifunción $\partial h \colon \mathscr{O} \rightrightarrows \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ es s.c.s. y sus imágenes son conjuntos compactos, convexos y no vacíos.

8.3.1 Recuerdo de Análisis convexo

Supongamos que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es una función convexa.

- La derivada direccional satisface
$$f'(x;d) = \inf_{t>0} \frac{f(x+td) - f(x)}{t} \qquad \forall x \in \mathrm{dom}(f),\ \forall d \in \mathbb{R}^n.$$
- f es continua en todo $x \in \mathrm{int}(\mathrm{dom}(f))$, con $\partial f(x)$ siendo compacto, convexo y no vacío. Además la derivada direccional satisface
$$f'(x;d) = \sigma_{\partial f(x)}(d) := \sup_{p \in \partial f(x)} p^\top d, \qquad \forall x \in \mathrm{int}(\mathrm{dom}(f)),\ \forall d \in \mathbb{R}^n.$$
- Si $r > 0$ y $M \in \mathbb{R}$ son tales que
$$f(x) \leq M, \qquad \forall x \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}^n}(\bar{x}, r),$$
entonces f es Lipschitz continua en $\mathbb{B}_{\mathbb{R}^n}(\bar{x}, r)$ con constante de Lipschitz $L = \dfrac{2}{r}(M - f(\bar{x}))$.

Lema 8.3 — (6, Corollary 10.8.1). Supongamos que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es una función convexa y para cada $k \in \mathbb{N}$, $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es una función convexa. Si $\mathscr{O} \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto tal que cada f_k y f son funciones finitas en $\mathscr{O}$ y
$$\limsup_{k \to +\infty} f_k(x) \leq f(x) < +\infty, \qquad \forall x \in \mathscr{O},$$
entonces para todo $C \subseteq \mathscr{O}$ compacto y $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que
$$f_k(x) \leq f(x) + \varepsilon, \qquad \forall k \geq k_0,\ x \in C.$$

Lema 8.4 Supongamos que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es una función convexa y $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es una función convexa para cada $k \in \mathbb{N}$. Si $\mathscr{O} \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto tal que cada f_k es una función finita en $\mathscr{O}$ y además
$$\lim_{k \to +\infty} f_k(x) = f(x) < +\infty, \qquad \forall x \in \mathscr{O},$$
entonces para toda sucesión $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathscr{O}$ que converge a $\bar{x} \in \mathscr{O}$ tenemos, que dado $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que
$$\partial f_k(x_k) \subseteq \partial f(\bar{x}) + \overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n}(\varepsilon), \qquad \forall k \geq k_0.$$

Demostración. Vimos que dado $\bar{x} \in \mathscr{O}$ y una sucesión $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathscr{O}$ que converge a $\bar{x}$ tenemos que

- existen $r, L \geq 0$ tal que tanto f como las f_k son L-Lipschitz continuas en $\mathbb{B}_{\mathbb{R}^n}(\bar{x}, r)$.
- para concluir basta probar que
$$\limsup_{k \to +\infty} f_k'(x_k; d) \leq f'(\bar{x}; d), \qquad \forall d \in \mathbb{R}^n.$$

□

Teorema 8.3.2 Supongamos que $\mathscr{O} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto y $H : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ es tal que

- $(x,y) \mapsto H_t(x,y) := H(t,x,y)$ es cóncava-convexa para todo $t \in [a,b]$ fijo;
- $t \mapsto H(t,x,y)$ es $\mathscr{L}$-medible para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ fijo.

Si $H(t,x,y) \in \mathbb{R}$ para todo $(t,x,y) \in [a,b] \times \mathscr{O}$, entonces la multifunción $F_H \colon [a,b] \times \mathscr{O} \rightrightarrows \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ definida por

$$F_H(t,x,y) := \partial H_t(x,y), \qquad \forall (t,x,y) \in [a,b] \times \mathscr{O},$$

es mediblemente s.c.s. y sus imágenes son conjuntos compactos convexos y no vacíos.

Demostración. Dividiremos la demostración en tres partes:

1. Para todo $(t,x,y) \in [a,b] \times \mathscr{O}$, el conjunto $F_H(t,x,y)$ es compacto, convexo y no vacíos.
2. Para todo $t \in [a,b]$ fijo, la multifunción $F_H(t,\cdot) = \partial H_t \colon \mathscr{O} \rightrightarrows \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ es s.c.s.
3. Para todo $(x,y) \in \mathscr{O}$ fijos, la multifunción $F_H(\cdot,x,y) \colon [a,b] \rightrightarrows \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ es $\mathscr{L}$-medible.

□

8.4 Existencia y propiedades cualitativas

Teorema 8.4.1 Supongamos que $\mathscr{O}, \mathscr{Q} \subseteq \mathbb{R}^n$ son conjunto abiertos y $H : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ es tal que

- $(x,y) \mapsto H_t(x,y) := H(t,x,y)$ es cóncava-convexa para todo $t \in [a,b]$ fijo;
- $t \mapsto H(t,x,y)$ es $\mathscr{L}$-medible para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ fijo;
- existe $r > 0$ y una función $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable ($\mathscr{L}$-medible) y positiva tal que

$$|H(t,x,y)| \leq \frac{r}{4}\alpha(t), \qquad \forall (t,x,y) \in [a,b] \times \left(\mathscr{O} + \overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n}(r)\right) \times \left(\mathscr{Q} + \overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n}(r)\right).$$

Si $K \subseteq \mathscr{O} \times \mathscr{Q}$ es un conjunto compacto convexo no vacío tal que

$$\int_a^b \alpha(t)dt < \operatorname{dist}\left((\xi,\eta), \mathscr{O}^c \times \mathscr{Q}^c\right), \qquad \forall (\xi,\eta) \in K,$$

entonces para todo $(\xi,\eta) \in K$ existen $x, y \in AC([a,b];\mathbb{R}^n)$ que verifican

$$\begin{cases} -\dot{y}(t) \in \partial_x H_t(x(t),y(t)), & \text{c.t.p. } t \in [a,b]. \\ \dot{x}(t) \in \partial_y H_t(x(t),y(t)), & \text{c.t.p. } t \in [a,b], \\ x(a) = \xi, \ y(a) = \eta. \end{cases} \tag{8.1}$$

Además, si $\mathbb{S}^H(\xi,\eta)$ denota al conjunto de trayectorias de (8.1), entonces la multifunción $\mathbb{S}^H : K \rightrightarrows C([a,b];\mathbb{R}^n)$ es s.c.s. y tiene imágenes compactas no vacías.

8.5 Principio del Máximo de Pontryagin

Consideremos el siguiente problema de control óptimo:

$$\text{Minimizar} \quad \int_a^b \ell(x(t),u(t))dt \quad \text{sobre todas la funciones } \mathscr{L}\text{-medibles } u : [a,b] \to \mathbb{R}^m \tag{P}$$

tales que

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad u(t) \in U \text{ c.t.p. } t \in [a,b], \quad x(a) = \xi_a \text{ y } x(b) = \xi_b$$

Donde $\ell : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ es una función dada, $A \in M_{n\times n}$ y $B \in M_{n\times m}$ son matrices a coeficientes reales, $U \subseteq \mathbb{R}^m$ es un conjunto no vacío, y $\xi_a, \xi_b \in \mathbb{R}^n$ son vectores dados.

Consideremos el Hamiltoniano:

$$H(x,y) = y^\top Ax + \sup_{u\in U}\left\{ y^\top Bu - \ell(x,u)\right\}, \qquad \forall x,y \in \mathbb{R}^n.$$

Teorema 8.5.1 Supongamos que $\ell : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ es una función convexa y diferenciable, $U \subseteq \mathbb{R}^m$ es un conjunto compacto, convexo y no vacío.

Dados $x, y \in AC([a,b];\mathbb{R}^n)$, con , las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) El par (x,y) es una trayectoria Hamiltoniana.

ii) Existe $\bar{u} : [a,b] \to U$ es $\mathscr{L}$-medible tal que Principio del Máximo de Pontryagin se verifica:

$$H(x(t),y(t)) = (Ax(t) + B\bar{u}(t))^\top y(t) - \ell(x(t),\bar{u}(t))$$

con

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B\bar{u}(t), && \text{c.t.p. } t \in [a,b], \\ \dot{y}(t) &= -A^\top y(t) + \nabla_x \ell(x(t),\bar{u}(t)), && \text{c.t.p. } t \in [a,b] \end{aligned}$$

Si $x(a) = \xi_a$ y $x(b) = \xi_b$, entonces cualquiera de las afirmaciones es equivalente a que $\bar{u}$ sea un control óptimo para (P).

9. Viabilidad e invarianza

Supongamos que $F\colon [a,b]\times\mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ es una multifunción y $K\subseteq\mathbb{R}^n$ es un conjunto no vacío. Ahora nos interesa estudiar el problema de encontrar trayectorias $x\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ que sean solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x}(t)\in F(t,x(t)), & \text{c.t.p. } t\in[a,b] \\ x(a)=\xi\in K \end{cases} \tag{ID}$$

tal que

$$x(t)\in K, \qquad \forall t\in[a,b]. \tag{R}$$

En particular, nos interesa encontrar condiciones para que

- exista al menos una trayectoria que verifique (ID) y (R) al mismo tiempo.
- toda solución de (ID) también satisfaga (R).

Formalmente usaremos las siguientes definiciones.

Definición 9.0.1 Supongamos que $F\colon [a,b]\times\mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ es una multifunción y $K\subseteq\mathbb{R}^n$ es un conjunto no vacío. Diremos que (F,K) es

- viable o débilmente invariante si para todo $\xi\in K$, existe $x\in\mathbb{S}^F(\xi)$ que verifica (R).
- fuertemente invariante si para todo $\xi\in K$ tenemos que todo $x\in\mathbb{S}^F(\xi)$ también verifica (R).

9.1 Condiciones suficientes

Por simplicidad estudiaremos sólo el caso de dinámicas autónomas (independientes de la variable temporal). El caso no autónomo puede ser estudiado asumiendo la variable temporal como una variable espacial más, considerando por ejemplo un nuevo conjunto de restricciones $\tilde{K}=[a,b]\times K$ junto con la dinámica aumentada

$$\tilde{F}(t,x)=\{1\}\times F(t,x), \qquad \forall (t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n.$$

El caso de dinámica que son sólo medible respecto a la variable temporal es mucho más delicado a tratar y por lo tanto no lo consideraremos en estas notas.

Primero estudiaremos algunos criterios suficientes para tener invarianza, ya sea débil o fuerte, de un sistema dinámico. Antes de comenzar con el análisis necesitamos introducir algunas herramientas de Análisis Variacional.

Definición 9.1.1 Supongamos que $S \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto no vacío. El cono proximal normal a **S** en $x \in S$, denotado por $\mathcal{N}_S^P(x)$, es el conjunto de todos los $\eta \in \mathbb{R}^n$ para los cuales existe $\delta = \delta(x,\eta) \geq 0$ tal que

$$\eta^\top(y-x) \leq \delta \|y-x\|^2_{\mathbb{R}^n}, \qquad \forall y \in S.$$

En la Figura 9.1 mostramos el cono normal proximal al conjunto $S = \{x_1 \leq \text{mín}\{x_2, x_2^2\}\}$ en el punto $\bar{x} = (0,0)$.

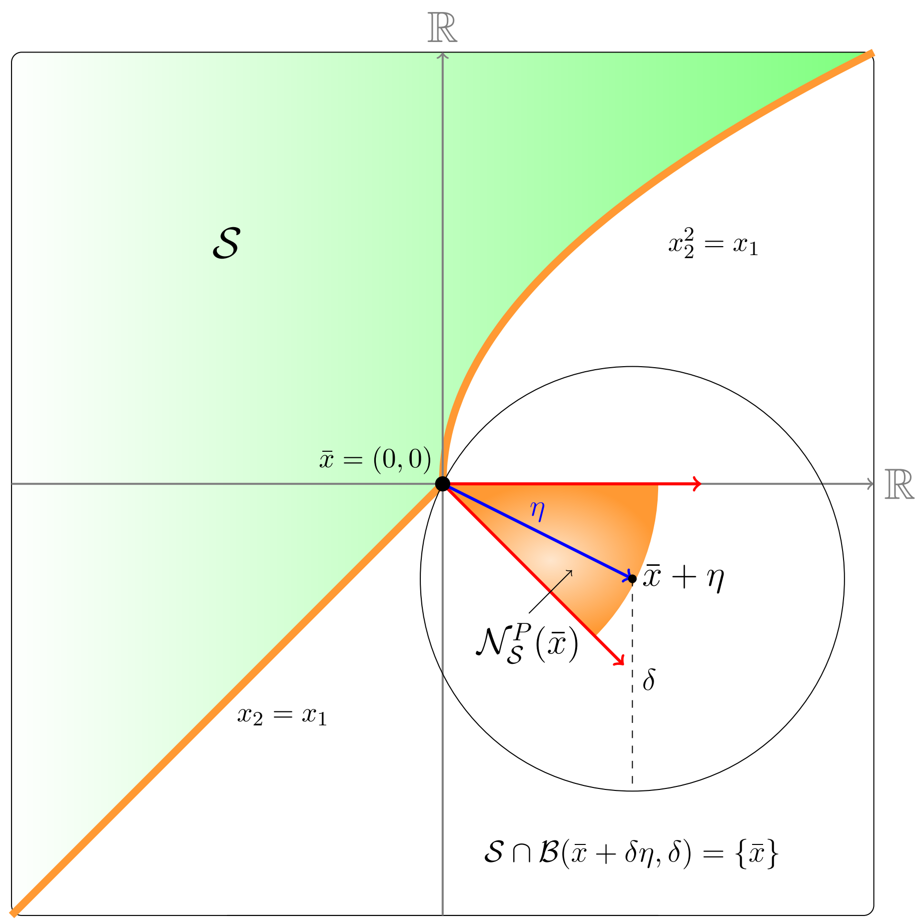

Figura 9.1: Un ejemplo del cono proximal normal a un conjunto en $\mathbb{R}^2$.

Dado $a \in \mathbb{R}$, denotaremos por $AC_{\text{loc}}([a,+\infty);\mathbb{R}^n)$ al conjunto de todas las funciones continuas $x : [a,+\infty) \to \mathbb{R}^n$ tales que $x|_{[a,b]} \in AC([a,b];\mathbb{R}^n)$ para todo $b \in (a,+\infty)$.

Veamos ahora una condición suficiente para tener invarianza débil.

Teorema 9.1.1 — Invarianza débil. Supongamos que $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto cerrado y no vacío, y que la multifunción $F\colon \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$

- es s.c.s. y sus imágenes son conjuntos cerrados, convexos y no vacíos,
- tiene crecimiento lineal: existe $c > 0$ tal que $\sup\limits_{v \in F(x)} \|v\|_{\mathbb{R}^n} \leq c(1 + \|x\|_{\mathbb{R}^n})$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Si para todo $x \in K$ tal que $\mathcal{N}_K^P(x) \neq \emptyset$ tenemos que

$$\min_{v \in F(x)} \eta^\top v \leq 0, \qquad \forall \eta \in \mathcal{N}_K^P(x),$$

entonces para cada $\xi \in K$ y $a \in \mathbb{R}$ existe una trayectoria $x \in AC_{\text{loc}}([a,+\infty);\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(x(t)), & \text{c.t.p. } t \in [a,+\infty) \\ x(a) = \xi, \\ x(t) \in K, & \forall t \in [a,+\infty). \end{cases} \tag{9.1}$$

Demostración. Dividiremos la demostración en partes.

1. (Preliminares) Notemos que, dado $b = a+1$, basta probar la existencia de $x \in AC([a,b];\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(x(t)), & \text{c.t.p. } t \in [a,b] \\ x(a) = \xi, \\ x(t) \in K, & \forall t \in [a,b]. \end{cases} \tag{9.2}$$

En efecto, si lo anterior fuese cierto, entonces podemos usar el mismo resultado reemplazando $\tilde{a} = a+1$, $\tilde{b} = a+2$ y $\tilde{\xi} = x(a+1)$ lo que permitiría construir una trayectoria viable en el intervalo $[a+1,a+2]$, que extiende a la trayectoria construida en el intervalo $[a,a+1]$. Luego generalizando el procedimiento podemos construir para cada $k \in \mathbb{N}$ una extensión al intervalo $[a,a+k]$ y luego por inducción, construir una trayectoria definida en todo $[a,+\infty)$.

Por otro lado sin pérdida de generalidad podemos asumir que la dinámica F es uniformemente acotada en $\mathbb{R}^n$. En efecto, tomemos $r \in \mathbb{R}$ tal que

$$r > e^{c(b-a)}(\|\xi\| + 1)$$

y definamos

$$F_r(x) := \begin{cases} F(x) & \text{si } \|x\|_{\mathbb{R}^n} < r \\ \operatorname{co}\left\{F\left(\frac{rx}{\|x\|_{\mathbb{R}^n}}\right) \cup \{0\}\right\} & \text{si } \|x\|_{\mathbb{R}^n} \geq r \end{cases}$$

No es difícil ver que las hipótesis del teorema también ser verifican si tomamos F_r en vez de F; en $K \setminus \overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n}(r)$ podemos tomar $v = 0$ en la desigualdad con el cono normal. Notemos que la condición de crecimiento lineal implica que F_r es acotada, pues tenemos

$$\sup_{v \in F_r(x)} \|v\|_{\mathbb{R}^n} \leq c(1+r), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Supongamos que $x \in AC([a,b];\mathbb{R}^n)$ satisface (9.2) con F_r en vez de F. Notemos que

$$\|\dot{x}(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq c(1 + \|x(t)\|_{\mathbb{R}^n}), \qquad \text{c.t.p. } t \in [a,b].$$

Luego, por la Desigualdad de Gronwall (Corolario 6.1.2) tenemos que

$$\|x(t)\|_{\mathbb{R}^n} \le e^{c(b-a)}(\|\xi\|+1) < r, \qquad \forall t \in [a,b].$$

Dado que $F(x) = F_r(x)$ para todo $\|x\|_{\mathbb{R}^n} < r$, entonces tenemos que x también satisface (9.2) Dado que ξ y b están fijos, sin pérdida de generalidad podemos asumir en adelante que

$$\|v\|_{\mathbb{R}^n} \le c(1+r), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n,\ v \in F(x).$$

2. Sea $m \in \mathbb{N}$ fijo y consideremos la partición uniforme del intervalo $[a,b]$:

$$t_i^m = a + ih_m, \quad \forall i = 0,\dots,m, \qquad \text{con } h_m = \frac{b-a}{m}.$$

Consideremos las secuencias finitas $\{x_0^m,\dots,x_m^m\}$, $\{v_0^m,\dots,v_m^m\}$ y $\{y_0^m,\dots,y_m^m\}$ definidas de forma recursiva como sigue: fijamos $x_0^m = \xi$ y para $i \in \{0,\dots,m-1\}$

a) tomamos $y_i^m \in K$, tal que $\|x_i^m - y_i^m\|_{\mathbb{R}^n} = \operatorname{dist}(x_i^m, K)$;

b) tomamos $v_i^m \in F(y_i^m)$ tal que $(x_i^m - y_i^m)^\top v_i^m \le 0$ y $\|v_i^m\|_{\mathbb{R}^n} \le c(1+r)$.

c) definimos $x_{i+1}^m = x_i^m + h_m v_i^m$.

Notemos que, dado que K es cerrado, el ínfimo en la definición de $\operatorname{dist}(x_i^m, K)$ se alcanza, lo que justifica la existencia de $y_i^m \in K$ (notar que no es necesariamente único). Por otro lado, notemos que $x_i^m - y_i^m \in \mathcal{N}_K^P(y_i^m)$ pues dado $x \in K$ tenemos

$$\|x_i^m - y_i^m\|^2_{\mathbb{R}^n} \le \|x_i^m - x\|^2_{\mathbb{R}^n} = \|x_i^m - y_i^m\|^2_{\mathbb{R}^n} + 2(x_i^m - y_i^m)^\top (y_i^m - x) + \|y_i^m - x\|^2_{\mathbb{R}^n}$$

lo que implica

$$(x_i^m - y_i^m)^\top (x - y_i^m) \le \frac{1}{2}\|x - y_i^m\|^2_{\mathbb{R}^n}.$$

En consecuencia, la existencia de $v_i^m \in F(y_i^m)$ que satisface el punto 2 está justificada por las hipótesis del teorema.

Consideremos ahora la curva $z^m \in AC([a,b];\mathbb{R}^n)$ que satisface $z^m(a) = x_0^m = \xi$ y está dada por

$$z^m(t) = x_i^m + (t - t_i^m)v_i^m, \qquad \forall i = 1,\dots,m-1,\ \forall t \in (t_i^m, t_{i+1}^m].$$

Notemos que la sucesión $\{z^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es acotada y equi-continua pues

$$\|\dot{z}^m(t)\|_{\mathbb{R}^n} \le \max_{i=0,\dots,m-1} \|v_i\|_{\mathbb{R}^n} \le c(1+r).$$

Luego por el Lema 4.2, existe $z \in AC([a,b];\mathbb{R}^n)$ y una subsucesión $\{z^{m_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $\{z^{m_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a z en $(C([a,b];\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$ y $\dot{z}^{m_j}$ converge débilmente a $\dot{z}$ en $L^1([a,b];\mathbb{R}^n)$.

3. Veamos ahora que $z(t) \in K$ para todo $t \in [a,b]$. Dado que K es cerrado, basta probar que $\operatorname{dist}(z(t), K) = 0$. Notemos primero que

$$\operatorname{dist}(x_1^m, K) \le \|x_1^m - \xi\|_{\mathbb{R}^n} \le h_m \|v_0^m\|_{\mathbb{R}^n} \le h_m c(1+r).$$

Por otro lado, para $i \in \{1,\dots,m\}$ tenemos $\operatorname{dist}(x_i^m, K) \le \|x_i^m - y_{i-1}^m\|_{\mathbb{R}^n}$, pero

$$\begin{aligned}
\|x_i^m - y_{i-1}^m\|^2_{\mathbb{R}^n} &= \|(x_i^m - x_{i-1}^m) + (x_{i-1}^m - y_{i-1}^m)\|^2_{\mathbb{R}^n} \\
&= \|x_i^m - x_{i-1}^m\|^2_{\mathbb{R}^n} + 2(x_i^m - x_{i-1}^m)^\top (x_{i-1}^m - y_{i-1}^m) + \|x_{i-1}^m - y_{i-1}^m\|^2_{\mathbb{R}^n} \\
&= \|x_i^m - x_{i-1}^m\|^2_{\mathbb{R}^n} + 2h_m {v_{i-1}^m}^\top (x_{i-1}^m - y_{i-1}^m) + \|x_{i-1}^m - y_{i-1}^m\|^2_{\mathbb{R}^n} \\
&\le h_m^2 c(1+r)^2 + 0 + \operatorname{dist}\left(x_{i-1}^m, K\right)^2.
\end{aligned}$$

Esto implica que $\operatorname{dist}(x_i^m,K)^2 \leq mh_m^2c^2(1+r)^2 = \frac{1}{m}c^2(1+r)^2$ para todo $i \in \{0,\ldots,m\}$. Notemos también que, dado $t \in (a,b]$ fijo, para todo $m \in \mathbb{N}$ existe $i_m \in \{0,\ldots,m-1\}$ tal que $t \in (t_i^m, t_{i+1}^m]$ y $z^m(t) = x_{i_m}^m + (t-t_{i_m}^m)v_i^m$. En particular, tenemos $0 \leq t - t_{i_m}^m \leq h_m$ y por lo tanto

$$\operatorname{dist}(z(t),K) \leq \liminf_{m\to+\infty} \operatorname{dist}(z^m(t),K) = \liminf_{m\to+\infty} \operatorname{dist}\left(x_{i_m}^m + (t-t_{i_m}^m)v_i^m, K\right) = \liminf_{m\to+\infty} \operatorname{dist}\left(x_{i_m}^m, K\right) = 0.$$

4. Para concluir tenemos que probar que $\dot{z}(t) \in F(z(t))$ c.t.p. $t \in [a,b]$. Supongamos por contradicción que existe un conjunto $\mathscr{L}$-medible $I \subseteq [a,b]$ de medida positiva tal que $\dot{z}(t) \notin F(z(t))$ para todo $t \in I$. Más aún, por el Lema de Lusin, podemos asumir que I es compacto y $\dot{z}(t)$ es continua en I. Esto implica que la función $t \mapsto \operatorname{dist}(\dot{z}(t), F(z(t)))$ es continua en I y por lo tanto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\operatorname{dist}(\dot{z}(t), F(z(t))) \geq \varepsilon$ para todo $t \in I$.
Fijemos $t_0 \in I$. Dado que F es s.c.s. existe $\delta > 0$ tal que

$$\operatorname{dist}(v, F(z(t_0))) < \varepsilon, \qquad \forall z \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}^n}(z(t_0),\delta),\ v \in F(z).$$

Notemos que

$$I_0 := I \cap \{t \in [a,b] \mid z(t) \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}^n}(z(t_0),\delta)\}$$

es un conjunto $\mathscr{L}$-medible de medida positiva tal que si $t \in I_0$, entonces $\dot{z}(t) \notin F(y)$ para todo $y \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}^n}(z(t),\delta)$, pues de otra forma tendríamos que $\operatorname{dist}(\dot{z}(t), F(z(t))) < \varepsilon$. En particular, tomando $\delta > 0$ más pequeño si fuese necesario, tenemos que $\dot{z}(t) \notin F_\delta(t)$ para todo $t \in I_0$, donde

$$F_\delta(t) := \overline{\operatorname{co}}\{v \in \mathbb{R}^n \mid v \in F(y),\ y \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}^n}(z(t),\delta)\} + \mathbb{B}_{\mathbb{R}^n}(\delta).$$

Notemos que, similar a la demostración hecha para el Teorema de Convergencia (Teorema 4.1.2)

$$\max_{v \in F_\delta(t)} v^\top p \geq \dot{z}(t)^\top p, \quad \forall p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad \Longleftrightarrow \quad \dot{z}(t) \in F(z(t)).$$

Luego existe $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y un conjunto $\mathscr{L}$-medible $I_1 \subseteq I_0$ de medida positiva tal que

$$\max_{v \in F_\delta(t)} v^\top p < \dot{z}(t)^\top p, \qquad \forall t \in I_1.$$

Dado que $z^{m_j} \to z$ uniformemente y $\dot{z}^m(t) = v_i^m$ si $t \in (t_{i-1}^m, t_i^m)$, para $j \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tenemos que $\dot{z}^{m_j}(t) \in F_\delta(t)$ para todo $t \in I_0$, lo que implica que

$$\dot{z}^{m_j}(t)^\top p \leq \max_{v \in F_\delta(t)} v^\top p.$$

Luego, integrando obtenemos una contradicción pues

$$\int_{I_1} \max_{v \in F_\delta(t)} v^\top p dt \geq \int_{I_1} \dot{z}^{m_j}(t)^\top p dt \to \int_{I_1} \dot{z}(t)^\top p dt > \max_{v \in F_\delta(t)} v^\top p dt$$

Por lo tanto $\dot{z}(t) \in F(z(t))$ c.t.p. $t \in [a,b]$

□

Ahora veremos una condición suficiente para tener invarianza fuerte. En comparación con el Teorema 9.1.1, en este caso necesitamos hipótesis de continuidad más fuertes sobre la dinámica. Sin embargo, con no necesitamos justificar la existencia de trayectoria, la hipótesis de convexidad puede ser descartada.

Teorema 9.1.2 — Invarianza fuerte. Supongamos que $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto cerrado y no vacío, y que la multifunción $F\colon \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ es L-Lipschitz continua con imágenes no vacías.

Si para todo $x \in K$ tal que $\mathcal{N}_K^P(x) \neq \emptyset$ tenemos que

$$\sup_{v \in F(x)} \eta^\top v \leq 0, \qquad \forall \eta \in \mathcal{N}_K^P(x),$$

entonces para cada $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $x \in AC([a,b];\mathbb{R}^n)$ Lipschitz continua, que satisface

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(x(t)), & \text{c.t.p. } t \in [a,b] \\ x(a) \in K, \end{cases} \tag{9.3}$$

tenemos que $x(t) \in K$ para todo $t \in [a,b]$.

Demostración. Dado que la función $x \mapsto \operatorname{dist}(x,K)^2$ es localmente Lipschitz continua y $t \mapsto x(t)$ es Lipschitz continua, tenemos que $t \mapsto \rho(t) := \operatorname{dist}(x(t),K)^2$ es locamente Lipschitz continua, y en particular, derivable c.t.p. gracias al Teorema de Rademacher. Luego, existe un conjunto $\mathscr{L}$-medible $I \subseteq [a,b]$ de medida total en $[a,b]$ tal que $\dot{x}(t)$ y $\dot{d}(t)$ existen y $\dot{x}(t) \in F(x(t))$ para todo $t \in I$.

Tomemos $z \in \operatorname{proy}(x(t),K)$ para $t \in I$ fijo. Sabemos que $x(t) - z \in \mathcal{N}_K^P(z)$ y además, como F es L-Lipschitz continua tenemos

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)) \subseteq F(z) + \overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n}(L\|x(t) - z\|_{\mathbb{R}^n}).$$

Luego existe $v \in F(z)$ tal que $\|\dot{x}(t) - v\|_{\mathbb{R}^n} \leq L\|x(t) - z\|_{\mathbb{R}^n}$. Usando la condición del teorema tenemos $(x(t) - z)^\top v \leq 0$.

Por otro lado tenemos

$$(x(t) - z)^\top \dot{x}(t) = (x(t) - z)^\top v + (x(t) - z)^\top (\dot{x}(t) - v) \leq 0 + Ld(t).$$

Notemos también que

$$\operatorname{dist}(x(t+h),K)^2 = \inf_{y \in K} \|x(t+h) - y\|_{\mathbb{R}^n}^2 \leq \|x(t+h) - z\|_{\mathbb{R}^n}^2$$

y por lo tanto

$$\dot{\rho}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{dist}(x(t+h),K)^2 - \operatorname{dist}(x(t),K)^2}{h} \leq \lim_{h \to 0} \frac{\|x(t+h) - z\|_{\mathbb{R}^n}^2 - \|x(t) - z\|_{\mathbb{R}^n}^2}{h} = \frac{d}{dt}\|x(t) - z\|_{\mathbb{R}^n}^2.$$

Lo que implica

$$\dot{\rho}(t) \leq \frac{d}{dt}\|x(t) - z\|_{\mathbb{R}^n}^2 = 2(x(t) - z)^\top \dot{x}(t) \leq 2L\rho(t), \qquad \forall t \in I.$$

Usando la desigualdad de Gronwall obtenemos

$$\rho(t) \leq e^{2L(t-a)}\rho(a), \qquad \forall t \in [a,b].$$

Dado que $\rho(a) = 0$ pues $x(a) \in K$ y K es cerrado, concluimos que $x(t) \in K$ para todo $t \in [a,b]$ $\square$

9.2 Condiciones necesarias

Pasemos ahora a estudiar algunas condiciones necesarias para la invarianza. Aquí consideraremos el caso no autónomo.

Proposición 9.2.1 — Invarianza débil. Supongamos que $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto cerrado y no vacío, y que la multifunción $F\colon [a,b] \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ es s.c.s., sus imágenes son conjuntos cerrados, convexos y no vacíos y tiene crecimiento lineal.

Si para cada $(\tau, \xi) \in [a,b) \times K$ existe una trayectoria $x \in AC([a,b];\mathbb{R}^n)$ solución de la inclusión diferencial

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)), \qquad \text{c.t.p. } t \in [\tau, b], \qquad \text{con } x(\tau) = \xi$$

tal que $x(t) \in K$ para todo $t \in [\tau, b]$, entonces para todo $(s,y) \in [a,b) \times K$ tal que $\mathcal{N}_K^P(y) \neq \emptyset$ tenemos que

$$\min_{v \in F(s,y)} \eta^\top v \leq 0, \qquad \forall \eta \in \mathcal{N}_K^P(y),$$

Demostración. Sea $(\tau, \xi) \in [a,b) \times K$ y $x \in AC([a,b];\mathbb{R}^n)$ como en el enunciado. Supongamos que $\mathcal{N}_K^P(\xi) \neq \emptyset$. Luego, dado $\eta \mathcal{N}_K^P(\xi)$, existe $\sigma \geq 0$ tal que

$$\eta^\top (x(t) - \xi) \leq \sigma \|x(t) - \xi\|^2_{\mathbb{R}^n}, \qquad \forall t \in [\tau, b].$$

Dado que F tiene crecimiento lineal, por la desigualdad de Gronwall (Corolario 6.1.2) tenemos

$$\frac{\|x(t) - \xi\|_{\mathbb{R}^n}}{t - \tau} \leq \frac{(e^{c(t-\tau)} - 1)}{t - \tau} \left(\|\xi\|_{\mathbb{R}^n} + 1 \right), \quad \forall t \in [\tau, b].$$

En consecuencia

$$\frac{1}{t-\tau} \int_\tau^t \eta^\top \dot{x}(s) ds = \frac{1}{t-\tau} \eta^\top (x(t) - \xi) \leq \sigma \frac{(e^{c(t-\tau)} - 1)}{t-\tau} \left(\|\xi\|_{\mathbb{R}^n} + 1 \right) \|x(t) - \xi\|_{\mathbb{R}^n}, \qquad \forall t \in (\tau, b].$$

Con esto podemos ver que

$$\limsup_{t \to \tau^+} \frac{1}{t-\tau} \int_\tau^t \eta^\top \dot{x}(s) ds \leq 0.$$

Ahora bien, dado que F es s.c.s. y $t \mapsto x(t)$ es una función continua en $[\tau, b]$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta \in (0, b - \tau]$ tal que

$$F(t, x(t)) \subseteq F(\tau, \xi) + \mathbb{B}_{\mathbb{R}^n}(\varepsilon), \qquad \forall t \in [\tau, \tau + \delta].$$

En particular, tenemos $\dot{x}(t) \in F(\tau, \xi) + \mathbb{B}_{\mathbb{R}^n}(\varepsilon)$ c.t.p. $t \in [\tau, \tau + \delta]$.

Por otro lado usando la definición de la integral de Lebesgue, existe una sucesión de funciones simples de la forma

$$v_k(t) = \sum_{i=1}^{m_k} \mathbb{1}_{A_i^k}(t) v_k^i$$

tal que $v_k \to \dot{x}$ c.t.p. $t \in [\tau, \tau + \delta]$ y $\int_\tau^{\tau+\delta} v_k(t) dt \to \int_\tau^{\tau+\delta} \dot{x}(t) dt$. Notemos que $F(\tau, \xi) + \mathbb{B}_{\mathbb{R}^n}(\varepsilon)$ es un conjunto convexo y por lo tanto la proyección sobre este conjunto está únicamente definida y satisface

$$\|\operatorname{proy}\left(v_k^i, F(\tau, \xi) + \mathbb{B}_{\mathbb{R}^n}(\varepsilon)\right) - v_k^i\|_{\mathbb{R}^n} \leq \|\dot{x}(t) - v_k^i\|_{\mathbb{R}^n}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}, i \in \{1, \ldots, m_k\}, \text{ c.t.p. } t \in [\tau, \tau + \delta].$$

□

Proposición 9.2.2 — Invarianza fuerte. Supongamos que $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto cerrado y no vacío, y que la multifunción $F\colon [a,b] \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ es s.c.i. con imágenes cerradas, convexas y no vacías

Si para cada $(\tau, \xi) \in [a,b) \times K$ y cada trayectoria $x \in AC([a,b]; \mathbb{R}^n)$ solución de la inclusión diferencial

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)), \qquad \text{c.t.p. } t \in [\tau, b], \qquad \text{con } x(\tau) = \xi$$

tenemos que existe $\delta \in (0, b-\tau)$ tal que $x(t) \in K$ para todo $t \in [\tau + \delta, b]$, entonces para todo $(s,y) \in [a,b) \times K$ tal que $\mathscr{N}_K^P(y) \neq \emptyset$ tenemos que

$$\sup_{v \in F(s,y)} \eta^\top v \leq 0, \qquad \forall \eta \in \mathscr{N}_K^P(y).$$

10. Monotonía a lo largo de trayectorias

Supongamos que $F\colon \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ es una multifunción y $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es una función propia. Ahora nos interesa estudiar el problema de encontrar trayectorias $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ que sean solución del problema de Cauchy

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)), \qquad \text{c.t.p. } t \in [0,+\infty) \tag{ID$_\infty$}$$

tal que

$$\varphi(x(t)) \leq \varphi(x(0)), \qquad \forall t \in [0,+\infty). \tag{R$_\infty$}$$

En particular, nos interesa encontrar condiciones para que

- exista al menos una trayectoria que verifique (ID$_\infty$) y (R$_\infty$) al mismo tiempo.
- toda solución de (ID$_\infty$) también satisface (R$_\infty$).

Similar a lo estudiado en el capítulo anterior, en el primer caso hablaremos de una propiedad débil y el el segundo de una propiedad fuerte.

10.1 Definiciones básicas

Dado $\xi \in \mathbb{R}^n$, denotemos por $\mathbb{S}_0^F(\xi)$ al conjunto de todas las trayectorias de la inclusión diferencial

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)), \quad \text{c.t.p. } t \in [0,+\infty), \qquad x(0) = \xi.$$

Definición 10.1.1 Supongamos que $F\colon \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ es una multifunción y $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es una función propia. Diremos que (φ, F) es:

- débilmente decreciente si para todo $\xi \in \operatorname{dom}(\varphi)$, existe $x \in \mathbb{S}_0^F(\xi)$ que verifica (R$_\infty$).
- fuertemente decreciente si para todo $\xi \in \operatorname{dom}(\varphi)$ y todo $x \in \mathbb{S}_0^F(\xi)$ se verifica (R$_\infty$).

10.2 Condiciones necesarias y suficientes

Teorema 10.2.1 Supongamos que $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es una función propia y semicontinua inferior, y que $F\colon \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$

- es s.c.s. y sus imágenes son conjuntos cerrados, convexos y no vacíos,
- tiene crecimiento lineal: existe $c > 0$ tal que $\sup\limits_{v \in F(x)} \|v\|_{\mathbb{R}^n} \leq c(1 + \|x\|_{\mathbb{R}^n})$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Luego (φ, F) es débilmente decreciente si y sólo si

$$\min_{v \in F(x)} p^\top v \leq 0, \qquad \forall p \in \partial_P \varphi(x),$$

Teorema 10.2.2 Supongamos que $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es una función propia y semicontinua inferior, y que la multifunción $F\colon \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ es L-Lipschitz continua con imágenes cerradas, convexas y no vacías.

Luego (φ, F) es fuertemente decreciente si y sólo si

$$\sup_{v \in F(x)} p^\top v \leq 0, \qquad \forall p \in \partial_P \varphi(x),$$

11. Ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman

En este último capítulo haremos un breve estudio de la Ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman, en particular sobre su relación con problemas de control óptimo.

11.1 La función valor

Dados $U \subseteq \mathbb{R}^m$, $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, consideremos el siguiente problema de Bolza parametrizado respecto a las condiciones iniciales $(\tau, \xi) \in [a,b) \times \mathbb{R}^n$:

$$\text{Minimizar} \int_\tau^b L(x(t),u(t))dt + g(x(b)) \quad \text{sobre las funciones } \mathscr{L}\text{−medibles } u : [\tau,b] \to \mathbb{R}^m \tag{P}$$

sujeto a

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t),u(t)), & \text{c.t.p } t \in [\tau,b] \\ x(\tau) = \xi \quad \text{y} \quad u(t) \in U & \text{c.t.p } t \in [\tau,b], \end{cases} \tag{SC}$$

Si $\mathscr{U}$ denota al conjunto de todas las funciones (controles) $\mathscr{L}$−medibles $u : [a,b] \to U$, denotaremos por $\mathbb{S}_u^f(\tau,\xi)$ al conjunto de soluciones del sistema de control (SC) asociado a $u \in \mathscr{U}$.

Definición 11.1.1 La función valor asociada al problema de control óptimo (P) corresponde a la función $V : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ definida por

$$V(\tau,\xi) = \begin{cases} \inf\limits_{u \in \mathscr{U}} \left\{ \int_\tau^b L(x(t),u(t))dt + g(x(b)) \mid x \in \mathbb{S}_u^f(\tau,\xi) \right\} & \text{si } \tau \in [a,b),\ \xi \in \mathbb{R}^n, \\ \\ g(\xi) & \text{si } \tau = b,\ \xi \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

11.1.1 Propiedades de la Función Valor

Proposición 11.1.1 — Principio de Programación Dinámica. Para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\tau \in [a,b)$ y $h \in (0, b-\tau]$ tenemos que

$$V(\tau,\xi) = \inf_{u\in\mathscr{U}} \left\{ \int_{\tau}^{\tau+h} L(t,x(t),u(t))dt + V(\tau+h, x(\tau+h)) \,\middle|\, x \in \mathbb{S}_u^f(\tau,\xi) \right\}.$$

En adelante usaremos las siguientes hipótesis sobre los datos del problema:

- Existe $\ell > 0$ tal que para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $u \in U$ tenemos

$$\|f(x,u) - f(y,u)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \ell\|x-y\|_{\mathbb{R}^n} \quad \text{y} \quad \|L(x,u) - L(y,u)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \ell\|x-y\|_{\mathbb{R}^n} \tag{H$_1$}$$

- El siguiente conjunto es convexo para todo $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\{(v,r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid \exists u \in U,\ v = f(x,u),\ L(x,u) \leq r \leq \|L\|_\infty\} \tag{H$_2$}$$

Proposición 11.1.2 Supongamos que $U \subseteq \mathbb{R}^m$ es un conjunto compacto, $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ es una función continua y acotada, y tanto $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ son funciones continua. Si (H$_1$) se verifica, entonces, la función valor $V : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ asociada al problema de control óptimo (P) es finita y continua.

Si además se verifica (H$_2$), entonces para todo $\tau \in [a,b)$ y $\xi \in \mathbb{R}^n$ existe $\bar{u} \in \mathscr{U}$ y una (única) trayectoria $\bar{x} \in \mathbb{S}_{\bar{u}}^f(\tau,\xi)$ tales que

$$V(\tau,\xi) = \int_{\tau}^{b} L(\bar{x}(t),\bar{u}(t))dt + g(\bar{x}(b)).$$

Corolario 11.1.3 Supongamos que $U \subseteq \mathbb{R}^m$ es un conjunto compacto, $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ es una función continua y acotada, y tanto $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ son funciones continua. Si (H$_1$) y (H$_2$) se verifican, entonces para todo $\tau \in [a,b)$ y $\xi \in \mathbb{R}^n$ existe $\bar{u} \in \mathscr{U}$ y una (única) trayectoria $\bar{x} \in \mathbb{S}_{\bar{u}}^f(\tau,\xi)$ tales que

$$V(\tau,\xi) = \int_{\tau}^{t} L(\bar{x}(s),\bar{u}(s))ds + V(t,\bar{x}(t)), \qquad \forall t \in [\tau,b].$$

11.2 Desigualdades de Hamilton-Jacobi-Bellman

Teorema 11.2.1 Supongamos que $U \subseteq \mathbb{R}^m$ es un conjunto compacto, $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ es una función continua y acotada, y tanto $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ son funciones continua. Si (H$_1$) y (H$_2$) se verifican, entonces la función valor $V : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ asociada al problema de control óptimo (P) es la función semicontinua inferior más pequeña que satisface

$$\theta + \min_{u\in U} \left\{ p^\top f(x,u) + L(x,u) \right\} \leq 0, \quad \forall(\theta,p) \in \partial_P W(t,x), \quad W(b,x) = g(x), \qquad \forall t \in [a,b),\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Teorema 11.2.2 Supongamos que $U \subseteq \mathbb{R}^m$ es un conjunto compacto, $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ es una función continua y acotada, y tanto $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ son funciones continua. Si (H_1) y (H_2) se verifican, entonces la función valor $V : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ asociada al problema de control óptimo (P) es la función semicontinua inferior más grande que satisface

$$\theta + \min_{u \in U} \left\{ p^\top f(x,u) + L(x,u) \right\} \geq 0, \quad \forall (\theta, p) \in \partial_P W(t,x), \quad W(b,x) = g(x), \qquad \forall t \in (a,b],\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Corolario 11.2.3 — Caracterización de la Función Valor. Supongamos que $U \subseteq \mathbb{R}^m$ es un conjunto compacto, $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ es una función continua y acotada, y tanto $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ son funciones continua. i (H_1) y (H_2) se verifican, entonces la función valor $V : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ asociada al problema de control óptimo (P) es la única función semicontinua inferior solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman en el sentido proximal:

$$-\theta + H(x,p) = 0, \qquad \forall (\theta, p) \in \partial_P W(t,x), \qquad \forall t \in (a,b),\ x \in \mathbb{R}^n.$$

que satisface para todo $x \in \mathbb{R}^n$ las condiciones de borde

$$\begin{aligned} -\theta + H(x,p) &\geq 0, \qquad \forall (\theta, p) \in \partial_P W(a,x), \\ -\theta + H(x,p) &\leq 0, \qquad \forall (\theta, p) \in \partial_P W(b,x) \\ W(b,x) &= g(x). \end{aligned}$$

donde $H(x,p)$ es el Hamiltoniano del problema que está dado por

$$H(x,p) := \max_{u \in U} \left\{ -p^\top f(x,u) - L(x,u) \right\}, \qquad \forall x, p \in \mathbb{R}^n.$$

Bibliografía

Libros

[1] Jean-Pierre Aubin e Ivar Ekeland. *Applied Nonlinear Analysis*. John Wiley & Sons, Inc., 1984 (véase página 10).

[2] Luis Barreira y Claudia Valls. *Ordinary Differential Equations: Qualitative Theory*. American Mathematical Society, 2012 (véanse páginas 23, 25).

[3] Charles Castaing y Michel Valadier. *Convex Analysis and Measurable Multifunctions*. Springer Berlin, Heidelberg, 1977 (véase página 38).

[4] James Dugundji. *Topology*. Allyn y Bacon, Inc., 1966 (véase página 10).

[5] Gerald Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. John Wiley & Sons, Inc., 1999 (véase página 31).

[6] Ralph Tyrrell Rockafellar. *Convex Analysis*. Princeton University Press, 1970 (véase página 73).

[7] Walter Rudin. *Functional Analysis*. McGraw-Hill, Inc., 1991 (véase página 32).

Índice alfabético

UNIVERSIDAD TECNICA
FEDERICO SANTA MARIA

Departamento de Matemática